

**מבחן ב"ניתוח אלגוריתמים"**  
**(מרצה : פרופ' אורי צוויק)**

משך המבחן : 3 שעות (**לא תינתן הארכה נוספת**).  
השימוש בכל חומר עזר **אסור**. מותר להסתמך על כל התוצאות שתוארו בכיתה, אלא אם כן התבקשתם במפורש להציג ולהוכיח תוצאות שהובאו בכיתה.

ענה/י על שלוש שאלות (**בלבד**) מתוך חמש השאלות הבאות. משקל כל השאלות שווה.  
ציין/י בתחילת המחברת באופן ברור מי הן שלושת השאלות שבחרת.

### שאלה 1

נסח/י והוכח/י את למת הדגימה שעליה מבוסס האלגוריתם הרנדומי בעל זמן הריצה הליניארי למציאת עצים פורשים מינימליים בגרפים לא מכוונים.

### שאלה 2

יהא  $G=(V,E,w)$  גרף מכוון וממושקל, כאשר  $w:E \rightarrow R$  ויהא  $r \in V$ . יהא  $C$  מעגל מכוון בגרף, שאינו עובר דרך  $r$  שכל אחת מהקשתות עליו היא הקשת הזולה ביותר שנכנסת לצומת המתאים. הראה/י שקיים עץ פורש מכוון מינימלי עם שורש  $r$  שמכיל את כל קשתות  $C$  פרט לאחת.

### שאלה 3

בעיית ההשמה (assignment) מוגדרת באופן הבא. נתונה מטריצה  $A$  בגודל  $n \times n$ . מצא/י תמורה  $\pi$  שעבורה  $\sum_{i=1}^n a_{i,\pi(i)}$  הוא מינימלי. תאר/י אלגוריתם יעיל ככל האפשר לפתרון בעיית ההשמה. מה סיבוכיות האלגוריתם שתארת?

### שאלה 4

יהא  $G=(V,E)$  גרף לא מכוון. יהא  $M$  שידוך ב- $G$  ותהא  $B$  תפרחת (עם גבעול מתאים) ביחס ל- $M$ . יהיו  $G_B$  ו- $M_B$  הגרף שמתקבל מכיווץ  $B$  והשידוך שמתאים ל- $M$  ב- $G_B$ . הוכח/י שיש מסלול שיפור ביחס ל- $M$  ב- $G$  אם יש מסלול שיפור ביחס ל- $M_B$  ב- $G_B$ .

## שאלה 5

יהא  $M = (S, A, s, c, p)$  תהליך החלטה מרקובי (Markov Decision Process) עם מקדם דיסקאונט  $\gamma$ . תהא  $h: S \rightarrow R$  פונקציה כלשהי. נגדיר פונקציית מחיר חדשה  $c_h$  באופן הבא: אם  $a \in A_i$  אז  $c_h(a) = c(a) + h(i) - \gamma \sum_{j \in S} p_{a,j} h(j)$ . (שימו לב לדמיון עם המחירים המתוקנים בבעיות המסלולים הקצרים ביותר וזרימה במחיר מינימלי.) נסמן ב- $val(i)$  את הערך האופטימלי של מצב  $i$  ביחס לפונקציית המחיר המקורית וב- $val_h(i)$  את הערך האופטימלי של מצב  $i$  ביחס לפונקציית המחיר  $c_h$ . מה הקשר בין  $val(i)$  ל- $val_h(i)$ ? הוכח/י את תשובתך.

# בהצלחה !!!