

מבחן ב' אלגוריתמים בפעולה"
(מרצים : פרופ' חיים קפלן ופרופ' אורי צוויק)

משך המבחן : 3 שעות (לא תינתן הארכה נוספת).
השימוש בכל חומר עזר **אסור**.

ענה/י על **שלוש** שאלות (**בלבד**) מתוך ארבע השאלות הבאות. משקל כל השאלות שווה.
ענה/י על השאלות בצורה ברורה ומלאה ככל האפשר, במסגרת מגבלות המקום והזמן.
ציין/י בתחילת המחברת באופן ברור מי הן שלושת השאלות שבחרת.

שאלה 1

בכיתה ראינו את האלגוריתם הרנדומי הבא לפתרון בעיית 3SAT: האלגוריתם מגריל פרמוטציה אקראית π של המשתנים ועובר על המשתנים לפני הסדר ב- π . כאשר הוא מגיע למשתנה x במידה ובהינתן הערכים שכבר הצבנו הנוסחה המצומצמת מכילה את הפסוקית (x) או (\bar{x}) אז האלגוריתם נותן ל- x את הערך 1 או 0 בהתאמה (אם שתי הפסוקיות נמצאות האלגוריתם עוצר ללא הצבה מספקת) אחרת האלגוריתם מגריל ל- x ערך אקראי, לאחר הצבת הערך ל- x האלגוריתם מצמצם את הנוסחה (מוריד את ה- ליטרלים של x ואת הפסוקיות המסופקות)..

הנח כי לנוסחה יש הצבה מספקת יחידה (נניח לשם פשטות כי לכל x ישנה פסוקית קריטית יחידה $c(x)$ שאינה מסופקת אם נהפוך את הערך של x בהצבה המספקת)

- נסמן ב- $r(\pi)$ את מספר המשתנים x כך ש- x אחרון ב- π מבין המשתנים של $c(x)$. מה התוחלת של $r(\pi)$ (ביחס לבחירה יוניפורמית אקראית של π). הוכח תשובתך
- תן חסם תחתון (שתלוי ב- $r(\pi)$) על ההסתברות של האלגוריתם לגלות את ההצבה המספקת כאשר הוא מגריל את π . הוכח תשובתך
- תן חסם תחתון על ההסתברות שהאלגוריתם מוצא את ההצבה המספקת. הוכח תשובתך

שאלה 2 (נושא זה לא נלמד השנה)

נזכר באלגוריתם של Lloyd לבעיית ה- k -means:
האלגוריתם בוחר k מרכזים, כל נקודה מבין n נקודות הקלט בוחרת את המרכז הקרוב אליה, קבוצת הנקודות שבחרו את אותו מרכז מחשבות את מרכז הכובד שלהם, ואז אנו מחליפים את המרכזים במרכזי הכובד וחוזר חלילה עד שהמרכזים לא משתנים יותר.
א. נניח כי נקודות הקלט הן על הישר, ו- $k=(n-1)$ מהו הפתרון האופטימאלי לבעיית ה- k -means? נניח כי מאתחלים את האלגוריתם ב- k מרכזים מבין נקודות הקלט, עבור אלו מהאתחולים האפשריים ימצא האלגוריתם את הפתרון האופטימאלי. הוכח
ב. עבור שני מרכזים ($k=2$) וקבוצה של n נקודות ב- R^d תן חסם הדוק ככל שתוכל על זמן ריצת האלגוריתם במקרה הגרוע ביותר. הוכח.

ג. מה תוכל לומר באופן כללי על היחס בין סכום ריבועי המרחקים של הנקודות מהמרכזים שמצא האלגוריתם לעומת סכום ריבועי המרחקים של הנקודות מהמרכזים האופטימאליים? הוכח

שאלה 3

בבעיית ה"מומחים" נתונים n מומחים. בכל יום t מבין T ימים, על האלגוריתם ALG לבחור התפלגות $p^{(t)}$ על המומחים. לאחר בחירת ההתפלגות, מתגלה וקטור המחירים $m^{(t)}$ של המומחים. נניח כאן ש- $0 \leq m_i^{(t)} \leq 1$ לכל $1 \leq i \leq n$. המחיר הכולל של המומחה ה- i הוא $cost^{(t)}(EXP_i) = \sum_{t=1}^T m_i^{(t)}$. המחיר הכולל של האלגוריתם הוא $cost(ALG) = \sum_{t=1}^T p^{(t)} \cdot m^{(t)}$. נניח שמספר הימים T ידוע מראש.

אין צורך להוכיח מחדש תוצאות שהוכחו בהרצאה אך יש לנסח אותן בצורה מדויקת.

א. תארי אלגוריתם ALG_1 לבחירת ההתפלגויות $p^{(t)}$ כך שעבור כל $1 \leq i \leq n$ וכל בחירה של וקטורי מחיר מתקיים:

$$cost^{(T)}(ALG_1) \leq cost^{(T)}(EXP_i) + f_1(T, n)$$

כאשר הפונקציה $f_1(T, n)$ קטנה ככל שתוכלי/י. הוכחי/י שהאלגוריתם שתיארת משיג את החסם שתיארת.

ב. נניח עתה שמספר הימים T אינו ידוע מראש.

תארי אלגוריתם ALG_2 לבחירת ההתפלגויות $p^{(t)}$ כך שעבור כל $1 \leq i \leq n$, כל בחירה של וקטורי מחיר מתקיים, ועבור כל T מתקיים:

$$cost^{(T)}(ALG_2) \leq cost^{(T)}(EXP_i) + f_2(T, n)$$

כאשר הפונקציה $f_2(T, n)$ קטנה ככל שתוכלי/י. הוכחי/י שהאלגוריתם שתיארת משיג את החסם שתיארת.

שאלה 4

יהא T טקסט (text) באורך n ו- P תבנית (pattern) באורך m מעל א"ב סופי Σ . תהא D מטריצה בגודל $|\Sigma| \times |\Sigma|$ שמתארת את חוסר הדמיון בין כל שתי אותיות בא"ב. עבור כל $k = 0, 1, \dots, n - m - 1$ נגדיר $d_k = \sum_{j=0}^{m-1} D(T[k+j], P[j])$ את חוסר ההתאמה הכולל בין התבנית לטקסט כאשר התו $P[0]$ מותאם לתו $T[k]$ בתבנית.

א. תארי אלגוריתם יעיל ככל האפשר לחישוב d_k , עבור $k = 0, 1, \dots, n - m - 1$. הוכחי/י את נכונות האלגוריתם ונתחי/י את סיבוכיותו.

ב. נניח עתה שכל איברי Σ הם מספרים שלמים וש- $D(a, b) = ab$, לכל $a, b \in \Sigma$. תארי אלגוריתם יעיל ככל האפשר לחישוב d_k , עבור $k = 0, 1, \dots, n - m - 1$. הוכחי/י את נכונות האלגוריתם ונתחי/י את סיבוכיותו.

ג. נניח עתה שכל איברי Σ הם מספרים שלמים וש- $D(a, b) = (a - b)^2$, לכל $a, b \in \Sigma$. תאר/י אלגוריתם יעיל ככל האפשר לחישוב d_k , עבור $k = 0, 1, \dots, n - m - 1$. הוכח/י את נכונות האלגוריתם ונתח/י את סיבוכיותו.

בהצלחה!!!