אז מה קורה באיטרציה אחת שבה מכפילים את המשקל?
מכפילים משקל שגדלו $\le \frac{1}{3d}\mu(H)$, ולכן המשקל החדש של H הוא לכל היותר:

$$\mu_{j+1}(H)\le\left(1+\frac{1}{3d}\right)\mu_j(H)$$

באיטרציה הראשונה: $\mu_0(H)=n$

ועם ההתקדמות:

$$\mu_j(H)\le\left(1+\frac{1}{3d}\right)^j n\le e^{j/3d}n$$

אבל טיעון כמו קודם אומר שבכל איטרציה מוצלחת, אם V לא ריק, הוא מכיל איבר של B.
לכן, לפחות איבר אחד של B הכפיל את משקלו. (מאותו טיעון כמו קודם)
$\Leftarrow$ לאחר kd איטרציות, לפחות לאיבר אחד (ב-B) יש משקל $\ge 2^k$.
(יש d דברים, כל פעם אולי אחר נתפס ומכפיל את משקלו)

$$\Rightarrow\quad 2^k\le e^{k/3}n$$

נוציא קצת לוגים ונשתמש בכך ש- $2>e^{1/3}$ אז:

$$\left(\frac{2}{e^{1/3}}\right)^k\le n \;\longrightarrow\; k=O(\log n)$$

לומר, מס' האיטרציות הוא d כפול לוג ב-n. $\Leftarrow O(d\log n)$ קריאות ל-SUBEX (בתוחלת), עם קלט בגודל $6d^2$.
וזה מצחיק. סך זמן הריצה אפילו לא יהיה פולינום של n... התלות הרעה (האקספוננציאלית) ב-d תהיה תלויה רק ב- $\log d$!! סך זמן הריצה יהיה $O(n+\text{דברים}\cdot\log n)$ בתוחלת.

הרצאה (7)

ראינו את CL1 ו-CL2, ש"מקיים" את זמן הריצה עבור האלג' העיקרי SUBEX (שעוד נראה).

זמנו הכרח...

<u>CL1</u>: ביצע בתוחלת $\le 2d$ קריאות ל-CL2, כל אחת עם $3d$ אילוצים + $O(d^3 n)$ overhead
<u>CL2</u>: ביצע בתוחלת $\le 6d\ln n$ קריאות ל- SUBEX עם $6d^2$ אילוצים + $O(d^2 n\log n)$ overhead

(סופרים פעולות אריתמטיות, ולא כמה זמן לוקחות הפעולות...)

<u>סה"כ:</u>

$$\underbrace{O(d^2 n)}_{CL1} + \underbrace{O(d\cdot d^2\cdot d\sqrt{n}\log n)}_{CL2} + \underbrace{\qquad}$$

$$= O(d^2 n + d^4\sqrt{n}\log n) + O(d^2\log n)\cdot SUBEX(6d^2, d)$$

בגדול, האיבר של $d^4\sqrt{n}\log n$ יהיה זניח ובאיבר האחרון אין תלות ליניארית ב-n ולכן הגורם הדומיננטי יהיה עם רק d^2.

אם כן, לסאב-אקס: <u>SUBEX(G,B)</u>

G - קב' של אילוצים

B - בסיס, $B\subseteq G$ אבל לאו דווקא בסיס של G.

הפרוצדורה היא randomized incremental. מוסיפים אילוצים ומעדכנים בהתאם אם צריך.

<u>הקלט:</u> H, H^+ $(x\geq 0)$. אנחנו לא רוצים להתעסק ב-SUBEX עם H^+, ולכן נעבוד עם איזשהו SUBEX0(H) שיקרא ל-$SUBEX(H\cup H^+, H^+)$ ← הבסיס ההתחלתי.

<u>הפלט:</u> (V_G, B') כאשר V_G - הפתרון עבור G, ו-B' בסיס של G.

```
proc SUBEX(G,B)
if G=B then
    return (V_B, B)
else
    choose random h ∈ G\B
    (V, B') ← SUBEX(G\{h}, B)
    if h violates v
        return SUBEX(G, basis(B',h))
    else
        return (V, B')
```

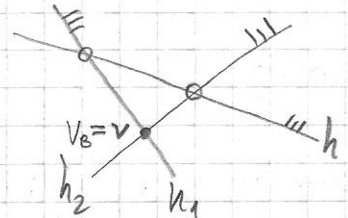
יש פה 2 פעולות שדורשות פירוט: (1) איך בודקים violation: מקבלים אילוץ וקדקד (כלומר violation-test(v,h)) ואת זה אפשר לעשות ב-$O(d)$. (2) חישוב בסיס, כלומר basis(B,h) = לחשב בסיס של $B\cup\{h\}$.

הכל יעבוד בהמשך באופן הרבה יותר כללי, אך לשם המחשה, בתכנות ליניארי

עם מישורים בסיס אפשר לצייר במישור

באופן הבא (עם h שמפר) ורוצים

לחשב בסיס חדש...



מ-v יוצאות d קשתות ששייכות לשפת האזור הפיזיבילי (קשת = קרן לא חסומה).

כל קשת ניתן לחשב בזמן $O(d^3)$ ע"י אלימינציית גאוס. יש משוואות ב-

(ומקבלים קשת)

נעלמים. לכל אחד מהקודקודים שנוצרים ע"י h (יש d כאלו) עושים זאת, כלומר

כל קשת חותכים עם h בזמן $O(d)$ ובוחרים את הקודקוד המינימלי. סה"כ $O(d^4)$.

<u>נכונות:</u>

הפלט (V,B) הוא אופק הפתרון $V=V_B=V_G$

<u>באינדוקציה:</u>

בכל קריאה רקורסיבית: או G קטן ב-1

או ערך V_B <u>גדל ממש</u>

כלומר $B''=basis(B',h)$, $V_{B''}>V_{B'}$.

ובקריאה הראשונה קיבלנו לפי הנחת הרקורסיה: $V_{B'}=V_{G\setminus\{h\}}\geq V_B$ כי $B\subseteq G\setminus\{h\}$.

כלומר אם בוחרים קבוצה יותר גדולה, אז יש מונוטוניות והערך רק קטן...

יש רק מספר סופי של ערכי V_B = נק' החיתוך של d מישורים.

הסדר שעליו נפעיל את האינדוקציה יהיה הסדר הלקסיקוגרפי על $(|G|,-V_B)$

כלומר אם $|G|$ לא גדל אז V_B קטן.

כלומר B מכריח את הפתרון לגדול.

← ניתוח הזמן.

מה הסיבוכיות כאן? דומה לאלג' של סיידל. כמה שקורה אם אמפר קצת שונה.

אצל סיידל, ההסתברות לקריאה השנייה הייתה $\frac{d}{n}$.

אצלנו, זה הופך להיות $\frac{d}{n-d}$. כלומר אם h הוא אחד מ-d האילוצים שמגדירים

את V_G יהיה צורך בקריאה שנייה. ואחרת, לא. נשים לב שמתוכם, $d-k$,

נמצאים כבר ב-B, הם לא יבחרו, לכן הסיכוי לקריאה שנייה יורד ל- $\frac{k}{n-d}$.

חלק מהאילוצים מסתתרים בתוך B (אם כולם, אז סיימנו). כמה k יכול להיות?

זו האינטואיציה. התפקיד של B הוא לבלוע חלק מהאילוצים הרעים ולהכריח את הפתרון להתקדם

נוכל לסדר את אילוצי G כך:

$$V_{G-h_1} < V_{G-h_2} < V_{G-h_3} < \dots < V_{G-h_d} \leq V_G \cdots V_G \; V_G \; V_G$$

כלומר כל אילוץ שמרכיב את V_G, אם נוריד אותו, הפתרון נופל, ואפשר לסדר...

איפה V_B? (זהו לא הבסיס של G!) הוא נמצא איפשהו בין V_{G-h_1} ל- V_{G-h_d}.

כלומר:

$$V_{G-h_{d-k}} < V_B \leq V_{G-h_{d-k+1}} \quad \text{ו-} \quad k=0,1,\dots,d$$

ל- k נקרא <u>המימד הנסתר</u> (hidden dimension) של B (ביחס ל- G).

<u>הבחנה:</u>

לכל $1 \le i \le d-k$: $h_i \in B$. למה? כי אם לא, אז $B \subseteq G \setminus h_i$ ואז:

$V_B \le V_{G\setminus h_i} < V_B$ וזו סתירה.

$\Leftarrow$ $h_d, \dots, h_1$ הם הקיצוניים ב- G (איברי הבסיס של G)

שמהם לכל היותר k מחוץ ל- B, לכן הקריאה השנ"ה מתבצעת בהסתב' $\le \frac{k}{n-d}$.

אלו שנותרו: $h_d, \dots, h_{d-k+1}$. אם לא בחרנו אחד מהם, לא קרה כלום. אם בחרנו אחד מהם - נניח שבחרנו את h_{d-k+i}, $i=1,2,\dots,k$ ואז אחרי הקריאה הראשונה: $V_{B'} = V_{G\setminus h_{d-k+i}}$, ו- $B''=basis(B', h_{d-k+i})$ ו- $V_{B''} > V_{B'}$

$$V_{G-h_1} \le V_{G-h_2} \cdots < \overset{V_{B'}}{V_{G-h_{d-k+1}}} < V_{B''}$$

כלומר B'' "קפץ" ימינה בסדרה לאחר $V_{G\setminus h_{d-k+i}}$ לכן יש לו ממד נסתר $\le k-i$.

כלומר הממד הנסתר מקטין את ההסתב' לקריאה השנ"ה, וגם נותן הסתב' יותר קטנה למה שנותר.

במילים של מיכה: במקום לומר שבהסתב' $\frac{k}{n-d}$ יש קריאה שנ"ה, נאמר

בהסתב' $\frac{1}{n-d}$	יש קריאה שנ"ה עם ממד נסתר	$k-1$
$\frac{1}{n-d}$	" " " " "	$k-2$
⋮	⋮	⋮
$\frac{1}{n-d}$	" " " " "	0

(יכול להיות אפילו יותר טוב, כי יתכן והממד הנסתר קטן בהרבה) אבל לא פחות טוב מזה.

לפני ניסוח הטענה, רק משהו שצריך לחלק הראשון באלגו'...

<u>הערה:</u> נשים לב שהממד הנסתר <u>מונוטוני ב- G</u>: אם $B \subseteq F \subseteq G$ אז:

$$h\text{-}dim_F(B) \le h\text{-}dim_G(B)$$

הסבר להערה: היו לנו $h_1,\dots,h_d$ האילוצים הקיצוניים ב-G.

$$V_{G\setminus h_1} \le V_{G\setminus h_2} < \dots < V_{G\setminus h_{d-k}} < V_B < \dots$$

כי F מוכלת ב-G

$$\begin{matrix} \text{VI} & \text{VI} & & \text{VI} \end{matrix}$$

$$V_{F\setminus h_1} \le V_{F\setminus h_2} < \dots < V_{F\setminus h_{d-k}} < V_B$$

ולכן

(וגם כל ה-h_i, $i=1,\dots,d-k$ שייכים ל-F כי הם שייכים ל-B).

$\Leftarrow$ כלומר לכל היותר k איברים מהסדרה עבור F יופיעו אחרי V_B וזה בדיוק אומר שה- $h.\dim_F(B) \le k$.

לצורך חישוב זמן הריצה (בתוחלת), נסמן $b(n,k)$ = מקסימום תוחלת מס' הקריאות ל- $basis(B',h)$ עבור n אילוצים וממד נסתר $\le k$, מעל כל הקלטות האמיתיות של האלג'.

$\therefore$ נוסחת הנסיגה:

כמה איברים נוגעו מחוץ לבסיס

$$b(n,k) \le b(n-1,k) + \frac{1}{n-d}\sum_{i=1}^{\min\{n-d,k\}} \left[1 + b(n,k-i)\right]$$

המימד הנסתר לא עולה כאשר עוברים לתת קבוצה

רק עבור הקיצוניים הרלוונטיים (ראינו ב"הסתה") יקרה שהדו

החישוב עצמו של הבסיס. הפעולה המתבצעת.

נרשום $m=n-d$ ונחליף את $b+1$ ב- $\hat{b}$: $\left[\hat{b}(m,k) = 1 + b(m+d,k)\right]$

$$\boxed{\hat{b}(m,k) \le \hat{b}(m-1,k) + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{\min\{k,m\}} \hat{b}(m,k-i)}$$

$\hat{b}(0,k) = 1$ (זה התנאי של $B=G$ ויציאה מיידית)

$\hat{b}(m,0) = 1$ כי אם המימד הנסתר הוא אפס, לא תהיה קריאה שניה כי כל האילוצים הרעים כבר ב-B ואין אילוץ שיגרום לקריאה שניה.

לא נשקיע כמה שעות בחשבון עכין.

אבל כן נראה שהפתרון הוא: $\hat{b}(m,k) \le 2^k m + 1$.

הבה נראה שזה באמת עובד. באינדוקציה. רואים שתנאי הבסיס עובדים. נציב:

$$\underline{\text{צד ימ'}} \le 2^k(m-1) + 1 + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{\min(k,m)} (2^{k-i}m+1) \le 2^k m - 2^k + 1 + 1 + \underbrace{(1+2+\dots 2^{k-1})}_{2^k-1} =$$

$$= \underline{\underline{2^k m + 1}}$$

ובצורה מפורשת עבור b n ו-d: $b(n,d) \le 2^{d(n-d)}$

נשווה את $2^d(n-d)$ עם חישוב~ עבור האלג' של seidel (לאחר שנכפיל ב- $O(d^4)$ וגם נחשב כמה violation-tests אנו עושים).

אם כן, כמה violation-tests: גם לזה אפשר לכתוב נוסחת נסיגה, שנראה בדיוק כמו הנוסחה הקודמת (המאוזכרת) רק שה- 1^+ מחוץ ל- Σ צריך להתבצע m פעמים במקום רק k. כלומר, לכל קריאה של ח עושים 1. כמו בתרגיל אפשר לראות שזה "גם אותו פתרון", והוא זה בערך מה שעשינו כאשר ~~...~~ לקחנו $\frac{m}{m}$ במקום $\frac{k}{m}$ ב- Σ במה שעשינו.

<u>נסכם</u>:

$$O\Big(d^2n + d^4\sqrt{n}\log n + \underbrace{d^2\log n\cdot \underbrace{SUBEX(6d^2,d)}_{\underbrace{6d^2\cdot 2^d}_{\text{החסם שהגענו אליו}}\cdot\underbrace{O(d^4)}_{\text{זמן } basis(B',h) + \text{violation test}}}}_{d^8 2^d\log n}\Big)$$

אנו משווים את מה לגורם הדומיננטי ל- d^2n

$$d^2n < d^8 2^d\log n \;\Rightarrow\; \frac{n}{\log n} < d^6 2^d \;\to\; \log n = O(d)$$

אפשר לבדוק ש- $d^4\sqrt{n}\log n$ אף פעם לא דומיננטי.

לכן אנו נשארים עם זמן הריצה: $O(d^2n + d^9\cdot 2^d)$

לנוסחת נסיגה יש פתרון יותר מדויק (הודות לכך שהסכום הוא על ה- $\min\{m,k\}$) ולא נבדוק כי זה מלא עבודה:

$$\hat{b}(m,k) \le e^{O(\sqrt{k\log m})} \to e^{O(\sqrt{d\log n})} \to e^{O(\sqrt{d\log d})}$$

לכן זה <u>sub</u>exponential.

ובסך הכל זה יהיה: $O(d^2n + e^{O(\sqrt{d\log d})})$

בשביל מה כל זה טוב? כלומר, חוץ מעולם התכנות הלינארי...

אז מסתבר שיש עוד בעיות שאפשר באמצעות סכמה זו והאלגוריתם הזה לפתור אותן...

בעיות LP-type (בעיות דמויות LP)

* יש לנו H, קב' של אילוצים.
* ויש לנו פונק' $w: 2^H \to W \cup \{-\infty\}$, כלומר לכל $G \subseteq H$, יש $w(G)$, ובמילים אחרות, W קב' עם סדר מלא.
  $-\infty$ קטן מכל איברי W.
* המטרה: לחשב קבוצה מינימלית B ("בסיס") המקיימת $w(B)=w(H)$.
* דורשים 2 תכונות:
  (1) מונוטוניות: $F \subseteq G \Rightarrow w(F) \le w(G)$
  (2) לוקליות: אם $F \subseteq G$, $w(F)=w(G)$, $h \notin G$ אז $w(G)<w(G\cup\{h\}) \iff w(F)<w(F\cup\{h\})$
  הכיוון מ-$w(F)$ ל-$w(G)$ נובע ממונוטוניות $w(G)=w(F)<w(F\cup\{h\}) \le w(G\cup\{h\})$, והכיוון השני זה משהו משהו בדבר הלא נכון משהו. סורי.

* המושגים המוגדרים:
  בסיס: B אם לכל $B' \subsetneq B$: $w(B')<w(B)$
  בסיס של G: בסיס B שמקיים $w(B)=w(G)$
  אילוץ h מפר קב' G אם $w(G\cup\{h\})>w(G)$
  אילוץ h קיצוני ב-G אם $w(G\setminus\{h\})<w(G)$

δ = המימד הקומבינטורי: גודל מקסימלי של בסיס.
כל העניין כאן יהיה מעניין (יעבוד) כאשר ניתן לתת חסם טוב על ממד הבסיס.
ונניח ש- $n \gg \delta$ (n=מס' האילוצים).

נשים לב: ב-LP כל הבסיסים היו שווי גודל.
ב-LP-Type לא בהכרח!
נאמר שהבעיה היא רגולרית-בסיס אם לכל הבסיסים אותו גודל (מטרת היא לא).

מניחים 2 פעולות פרימיטיביות, קופסאות שחורות, שמניחים שהן נתונות.
האחת: violation-test(B,h) - בודקת האם h מפר את B, כלומר האם $w(B\cup\{h\})>w(B)$.
השנייה: basis(B,h) - מחזירה בסיס של $B\cup\{h\}$.

לבסוף, נניח שנתון בסיס התחלתי B_0 (לא רוצים בעיה לא חסומה. נניח שיש איזה פתרון התחלתי)

CL1, CL2, SUBEX עובדים מילה במילה עבור בע"ת LP-Type, כי ספרנו כמה פעמים ביצענו את זוג הפעולות הפרימיטיביות.
למשל, כתבנו $O(d^2n)$, ועכשיו נכתוב $O(\delta n\cdot(\#viol))$.
נשים לב שכל חישובי ה- basis הם רק ב- SUBEX. CL1, ו-CL2 עושות רק חישובי violation.

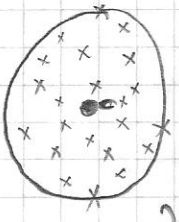
במונוטוניות משתמשים פעמים רבות אבל גם בלוקליות. היכן? למשל בלוקליות משתמשים ב- if h does not violate B אזי אומרים מצאנו פתרון כי הלוקליות אומרת ש- h מפר את B $\Longleftrightarrow$ h מפר את G. ובקצת יותר בהירות, אומרים שמצאנו פתרון כי אנו מניחים ש- $W(B)=W(G-h)$, $B\subseteq G-h$, אז h מפר את B אם"ם הוא מפר את G-h. לכן, אם h לא מפר את B ולכן הוא לא מפר את G-h ואז $W(G)=W(G-h)$.

כעת, **זמן הריצה** הוא: $O(\underset{viol}{\delta n}+\underset{שניהם}{e^{O(\sqrt{\delta\log\delta})}})$ = מס' הקריאות ל- viol-test ו- basis.

דוגמאות

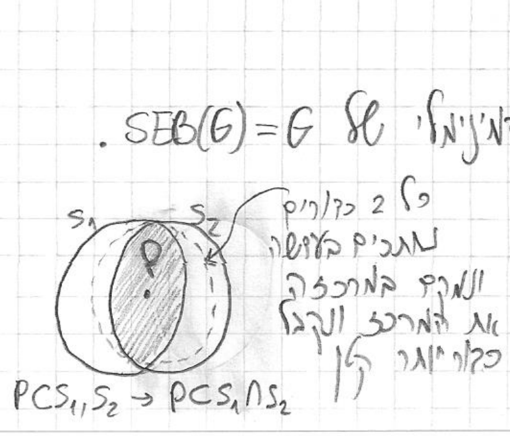
דוגמה: Smallest Enclosing Ball = כדור חוסם מינימלי

נתונה קב' P של n נק' ב- R^d. רוצים למצוא את הכדור המינימלי של P.



באופן קצת יותר מוכלל, קוראים לבעיה ה- 1-center.
מיקום מרכז הכדור, זה כמו שנמקם בית חולים במקום הכי טוב, כלומר שאז המרחק המקס' מבית חולים יהיה הכי קטן שאפשר.

למה זו בע"ת LP-type?
האילוצים = הנק'.
לכל קבוצה $G\subseteq P$, נגדיר $W(G)$ = רדיוס הכדור המינימלי של $G = SEB(G)$.



טענה - ה-SEB(G) הוא יחיד לכל G. ואם לא, יש 2 כדורים שווי גודל

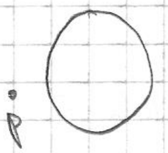
מונוטוניות: $F\subseteq G$ ← $W(F)\le W(G)$

לוקליות: תמיד התכונה העיקרית שיש לבדוק בזהירות. היא נובעת העקרון מיחידות SEB. נניח:

$F\subseteq G$, $W(F)=W(G)$. צ"ל $W(G\cup\{p\})>W(G)$

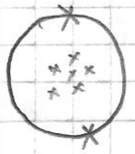
$$\Downarrow \qquad \| $$

$$W(F\cup\{p\})>W(F)$$



כלומר אם p נמצאת מחוץ לכדור של F, אז היא גם מחוץ לכדור של G, בגלל היחידות של הכדור (ה- SEB)

$W(B)>W(B')$
לכל $B'\subsetneq B$



מהו גודל הבסיס כאן? הוא יכול להיות 2.

הבסיס ב- 2 ממדים הוא 3 לכל היותר. אולי יש הרבה נק' על שפת המעגל, אבל כל 3 מהן שלא נמצאות באותו חצי מעגל יגדירו בסיס. צריך 2 נקודות קטביות לכך.

ב- d ממדים, צריך d+1 נק', שלא כולן נמצאות באותו חצי כדור.
לכן גודל הבסיס הוא
$2\le$ גודל בסיס $\le d+1$
ולכן הבעיה לא רגולרית בסיס.

* violation-test - קל לעשות ב- $O(d)$.
* basis(B,p) - פעולה לא פשוטה: $O(2^d)$ באופן עקרוני, לבחון את כל האפשרויות. להשקיע עליה, אפשר לשפר ל- $e^{O(\sqrt{d})}$, עם אלג' רנדומי עם עוד כמה טריקים נוספים.

⇐ לבעיה יש פתרון בזמן: (צפוי): $O(d^2n+4^d)$
שזה אמנם נחמד - לינארי ב-n! ואפשר להוריד כאמור ל- $e^{O(\sqrt{d\log d})}$ את האיבר השני.