

# סיבוכיות תקשורת ואינפורמציה

תרגיל בית 1: סיבוכיות תקשורת דטרמיניסטית

הגשה: בכתב או דפוס בסוף השיעור ב- 16.4

1. תהא  $f: X \times Y \rightarrow \{0,1\}$  פונקציה, ותהא  $M_f$  המטריצה המייצגת את  $f$ . הוכיחו או הפריכו: לכל חלוקה של  $M_f$  למלבנים  $f$ -מונוכרומטיים קיים פרוטוקול  $\Pi$  המשרה חלוקה זו, כלומר פרוטוקול שמייצר בדיוק את המלבנים ב-  $P$ .  
(תזכורת: חלוקה של  $M_f$  למלבנים  $f$ -מונוכרומטיים הינה קבוצה  $P = \{R_1, \dots, R_k\}$  של מלבנים  $f$ -מונוכרומטיים, כך שלכל  $i \neq j$  מתקיים  $R_i \cap R_j = \emptyset$ , וכמו-כן  $\bigcup_{i=1}^k R_i = X \times Y$ .)
2. תרגיל 1.26 מהספר: הוכיחו שגודלו של כל מלבן 1-מונוכרומטי של הפונקציה DISJOINTNESS הוא לכל-היותר  $2^n$ , והסיקו מכך ש-  $D(\text{DISJOINTNESS}) = \Omega(n)$ .
3. תרגיל 1.31 מהספר:  
א. הוכיחו שאם  $f: X \times Y \rightarrow \{0,1\}$  היא פונקציה כך שב-  $M_f$  (הייצוג של  $f$  כמטריצה) אין שתי שורות זהות, אזי  $D(f) \geq \log \log |X|$ .  
ב. הוכיחו שלכל פונקציה  $f: X \times Y \rightarrow \{0,1\}$  מתקיים  $D(f) \leq \text{rank}_{\mathbb{R}}(M_f) + 1$ .
4. תרגיל זה עוסק בפונקציות חלקיות. בהנתן פונקציה חלקית  $f: X \times Y \rightarrow \{0,1\}$  נסמן ב-  $\text{dom}(f)$  את קבוצת האיברים ב-  $X \times Y$  עבורם  $f$  מוגדרת.  
נאמר שפרוטוקול דטרמיניסטי  $\Pi$  מחשב פונקציה חלקית  $f$  אם לכל  $(x,y) \in \text{dom}(f)$  הפלט של  $\Pi$  הוא  $f(x,y)$ . את סיבוכיות התקשורת של  $\Pi$  נגדיר להיות  $\max_{(x,y) \in \text{dom}(f)} |\Pi(x,y)|$ .  
א. הרחיבו את הגדרת המלבן ה-  $f$ -מונוכרומטי אותה ראינו בכיתה, המתאימה לפונקציות מלאות, להגדרה המתאימה לפונקציות חלקיות. הוכיחו שעבור ההגדרה שנתתם עדיין מתקיים: לכל פרוטוקול דטרמיניסטי  $\Pi$ , ולכל תמליל  $t$  של  $\Pi$ , קבוצת הקלטים הגורמים ל-  $\Pi$  לייצר את התמליל  $t$  הינה מלבן  $f$ -מונוכרומטי.  
ב. הרחיבו את הגדרת ה- fooling set להגדרה המתאימה לפונקציות חלקיות. הוכיחו שממשך להתקיים: אם קיים fooling set בגודל  $s$  עבור  $f$ , אזי  $D(f) \geq \log s$ .  
ג. הוכיחו שלפונקציה Gap Equality, המוגדרת להלן, סיבוכיות תקשורת  $\Omega(n)$ :  
$$f_{\text{GEq}}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = y, \\ 0 & \text{if } \Delta(x,y) \geq n/100, \\ \text{undefined} & \text{otherwise.} \end{cases}$$
  
רמז: השתמשו בשיטה ההתסברותית (probabilistic method).
5. תרגיל זה עוסק בסיבוכיות תקשורת חד-כיוונית. בפרוטוקול תקשורת חד-כיוונית, אליס מתבוננת בקלט שלה  $x$  ושולחת לבוב הודעה אחת (ארוכה כרצונה), ואז בוב פולט את התשובה (התלויה בהודעה שקיבל מאליס וב-  $y$ ). סיבוכיות התקשורת של הפרוטוקול היא אורך ההודעה של אליס במקרה הגרוע. בבעיית האינדקס, אליס מקבלת קבוצה  $X \subseteq \{1, \dots, n\}$  ובוב מקבל איבר  $y \in \{1, \dots, n\}$ , ועל השחקנים להכריע האם  $y \in X$ . הוכיחו שסיבוכיות התקשורת החד-כיוונית (הדטרמיניסטית) של בעיית האינדקס היא  $\Omega(n)$ .