

**מבחן ב' ניתוח אלגוריתמים'**  
**(מרצה : פרופ' אורי צוויק)**

משך המבחן : 3 שעות (**לא תינתן הארכה נוספת**).  
השימוש בכל חומר עזר **אסור**. מותר להסתמך על כל התוצאות שתוארו בכיתה, אלא אם כן התבקשתם במפורש להציג ולהוכיח תוצאות שהובאו בכיתה.  
ענה/י על שלוש שאלות (**בלבד**) מתוך ארבע השאלות הבאות. משקל כל השאלות שווה.  
ציין/י בתחילת המחברת באופן ברור מי הן שלושת השאלות שבחרת.

### שאלה 1

נסח/י את למת הדגימה שאליה מבוסס ניתוח האלגוריתם ההסתברותי למציאת עצים פורשים מינימליים של Karger, Klein and Tarjan והוכח/י את נכונותה.

### שאלה 2

הנח/י שקיים אלגוריתם ססיבוכיותו  $O(mn^{1/4})$  שבהינתן גרף מכוון  $G=(V,E)$  בעל  $n$  צמתים ו- $m$  קשתות, עם פונקצית משקל  $w:E \rightarrow \mathbb{Z}$  כך ש- $w(e) \geq -n$  לכל  $e \in E$ , מוצא ב- $G$  מעגל שלילי, אם קיים, או מחזיר פונקצית פוטנציאל שלאחר השימוש בה משקלי כל הקשתות הם אי-שליליים. תאר/י אלגוריתם יעיל ככל האפשר שמבצע את אותה פעולה על גרף כנ"ל שעבורו  $w(e) \geq -N$ , כאשר  $N > n$ . מה סיבוכיות האלגוריתם שתארת?

### שאלה 3

בשאלה זאת נדון באלגוריתם הדינאמי של Demetrescu and Italiano למציאת מסלולים קצרים ביותר שתואר בכיתה וש pseudo-code שלו מצורף. הנח/י שהמסלולים הקצרים ביותר בכל שלב, בין כל זוג צמתים בגרף, הם יחידים.

תזכורת: האלגוריתם מתחזק מסלולים שהם Locally Historical Paths (LHP). בכל שלב, מספר ה-LHP שעוברים דרך צומת נתון  $v$  הוא  $O(zn^2)$ , כאשר  $z=O(\log n)$ .

הוכח/י או הפרך/י:

- א. זמן עדכון מגדיל (כלומר עדכון שבו אורכי קשתות יכולים רק לגדול) הוא במקרה הגרוע ביותר  $O(n^2)$ . (כלומר  $O(n^2 \log^c n)$ , עבור קבוע כלשהו  $c$ .)
- ב. זמן עדכון מקטיף (כלומר עדכון שבו אורכי קשתות יכולים רק לקטון) הוא במקרה הגרוע ביותר  $O(n^2)$ . (כלומר  $O(n^2 \log^c n)$ , עבור קבוע כלשהו  $c$ .)

#### שאלה 4

הנח/י שקיים אלגוריתם דטרמיניסטי למציאת חתך מינימום גלובלי בגרף ממושקל אך לא מכוון בעל  $n$  צמתים שסיבוכיותו  $O(n^3)$ . עבור כל  $0 < a < 1$  נתאר אלגוריתם הסתברותי למציאת חתך מינימום גלובלי שפועל באופן הבא. בהינתן גרף בעל  $n$  צמתים, מכוון האלגוריתם קשתות מקריות, שנבחרות בהסתברות יחסית למשקלן, עד שנותרים בגרף רק  $n^a$  צמתים. על הגרף הנותר מורץ האלגוריתם הדטרמיניסטי. על פעולה זאת חוזר האלגוריתם כמספר הפעמים הדרוש בכדי להבטיח שחתך מינימום גלובלי ימצא בהסתברות קבועה. מה ערכו של  $a$  שעבורו זמן הריצה של האלגוריתם מינימאלי? מה סיבוכיות האלגוריתם במקרה זה?

**מהצחה !!!**