

מבחן ב' ניתוח אלגוריתמים'
(מרצה : פרופ' אורי צוויק)

משך המבחן : 3 שעות (**לא תינתן הארכה נוספת**).
השימוש בכל חומר עזר **אסור**. מותר להסתמך על כל התוצאות שתוארו בכיתה, אלא אם כן התבקשתם במפורש להציג ולהוכיח תוצאות שהובאו בכיתה.
ענה/י על שלוש שאלות (**בלבד**) מתוך ארבע השאלות הבאות. משקל כל השאלות שווה.
ציין/י בתחילת המחברת באופן ברור מי הן שלושת השאלות שבחרת.

שאלה 1

נסח/י את למת הדגימה שאליה מבוסס ניתוח האלגוריתם ההסתברותי למציאת עצים פורשים מינימליים של Karger, Klein and Tarjan והוכח/י את נכונותה.

שאלה 2

הנח/י שקיים אלגוריתם ססיבוכיותו $O(mn^{1/4})$ שבהינתן גרף מכוון $G=(V,E)$ בעל n צמתים ו- m קשתות, עם פונקצית משקל $w:E \rightarrow \mathbb{Z}$ כך ש- $w(e) \geq -n$ לכל $e \in E$, מוצא ב- G מעגל שלילי, אם קיים, או מחזיר פונקצית פוטנציאל שלאחר השימוש בה משקלי כל הקשתות הם אי-שליליים. תאר/י אלגוריתם יעיל ככל האפשר שמבצע את אותה פעולה על גרף כנ"ל שעבורו $w(e) \geq -N$, כאשר $N > n$. מה סיבוכיות האלגוריתם שתארת?

שאלה 3

בשאלה זאת נדון באלגוריתם הדינאמי של Demetrescu and Italiano למציאת מסלולים קצרים ביותר שתואר בכיתה וש pseudo-code שלו מצורף. הנח/י שהמסלולים הקצרים ביותר בכל שלב, בין כל זוג צמתים בגרף, הם יחידים.

תזכורת: האלגוריתם מתחזק מסלולים שהם Locally Historical Paths (LHP). בכל שלב, מספר ה-LHP שעוברים דרך צומת נתון v הוא $O(zn^2)$, כאשר $z=O(\log n)$.

הוכח/י או הפרך/י:

- א. זמן עדכון מגדיל (כלומר עדכון שבו אורכי קשתות יכולים רק לגדול) הוא במקרה הגרוע ביותר $O(n^2)$. (כלומר $O(n^2 \log^c n)$, עבור קבוע כלשהו c .)
- ב. זמן עדכון מקטיף (כלומר עדכון שבו אורכי קשתות יכולים רק לקטון) הוא במקרה הגרוע ביותר $O(n^2)$. (כלומר $O(n^2 \log^c n)$, עבור קבוע כלשהו c .)

שאלה 4

הנח/י שקיים אלגוריתם דטרמיניסטי למציאת חתך מינימום גלובלי בגרף ממושקל אך לא מכוון בעל n צמתים שסיבוכיותו $O(n^3)$. עבור כל $0 < a < 1$ נתאר אלגוריתם הסתברותי למציאת חתך מינימום גלובלי שפועל באופן הבא. בהינתן גרף בעל n צמתים, מכוון האלגוריתם קשתות מקריות, שנבחרות בהסתברות יחסית למשקלן, עד שנותרים בגרף רק n^a צמתים. על הגרף הנותר מורץ האלגוריתם הדטרמיניסטי. על פעולה זאת חוזר האלגוריתם כמספר הפעמים הדרוש בכדי להבטיח שחתך מינימום גלובלי ימצא בהסתברות קבועה. מה ערכו של a שעבורו זמן הריצה של האלגוריתם מינימאלי? מה סיבוכיות האלגוריתם במקרה זה?

מהצחה !!!