

## מבחן ב' ניתוח אלגוריתמים' (מרצה : פרופ' אורי צוויק)

משך המבחן : 3 שעות (לא תינתן הארכה נוספת). השימוש בכל חומר עזר **אסור**. מותר להסתמך על כל התוצאות שתוארו בכיתה, אלא אם כן התבקשתם במפורש להציג ולהוכיח תוצאות שהובאו בכיתה.

ענה/י על שלוש שאלות (**בלבד**) מתוך ארבע השאלות הבאות. משקל כל השאלות שווה. ציין/י בתחילת המחברת באופן ברור מי הן שלושת השאלות שבחרת.

### שאלה 1

יהא  $G=(V,E,w)$  גרף לא מכוון ממושקל. נתון שכל משקלי הקשתות שונים זה מזה. תהא  $E'$  קבוצת  $|E|/2$  הקשתות בעלות המשקל הקטן ביותר ב- $G$ , ויהא  $G'=(V,E',w)$  תת-הגרף שנפרש ע"י  $E'$ . יהא  $F$  יער פורש מינימלי של  $G'$ . מצא/י חסם עליון טוב ככל האפשר, במונחים של  $|E|=m$  ו- $|V|=n$ , על מספר קשתות  $G$  שהן  $F$ -קלות. הצג/י גרפים שעבורם החסם שנתת הדוק.

### שאלה 2

היפרגרף 3-יוניפורמי  $H=(V,E)$  מורכב מקבוצת צמתים  $V$  ומקבוצת היפר-קשתות  $E$ , כאשר כל היפר-קשת  $e \in E$  היא קבוצה של שלושה צמתים, כלומר  $e \subseteq V$  ו- $|e|=3$ . חתך  $(S,T)$  של  $H$  הוא חלוקה של  $V$  לשתי קבוצות זרות ולא ריקות  $S$  ו- $T$ . נאמר שהיפר-קשת  $e$  נחתכת ע"י החתך  $(S,T)$  אם ורק אם  $|e \cap S| \neq 0$  וכן  $|e \cap T| \neq 0$ . תאר/י אלגוריתם **דטרמיניסטי**, יעיל ככל האפשר, שבהינתן היפרגרף 3-יוניפורמי מוצא חתך שלו שחותך מספר מינימלי של היפר-קשתות.

### שאלה 3

יהא  $G=(V,E)$  גרף מכוון וממושקל, ויהא  $r$  צומת של  $G$ . תאר/י בפירוט אלגוריתם למציאת משקלו של עץ פורש מכוון מינימלי ש- $r$  הוא שורשו והוכח/י את נכונותו. מה סיבוכיות האלגוריתם שתיארת?

### שאלה 4

יהא  $G=(V,E,w)$  גרף לא מכוון ממושקל. יהא  $M$  שידוך ב- $G$  ויהא  $C$  מעגל מתחלף ביחס ל- $M$ . משקלו  $w_M(C)$  של  $C$  ביחס ל- $M$  מוגדר כסכום משקלי קשתות של  $C$  ששייכות ל- $M$  פחות סכום משקלי הקשתות של  $C$  שאינן ב- $M$ . הוכח/י או הפרך/י:  $M$  הוא שידוך מושלם של  $G$  בעל משקל מינימלי אם ורק אם עבור כל מעגל מתחלף  $C$  ביחס ל- $M$  מתקיים  $w_M(C) \leq 0$ .

**בהצלחה !!!**