950 952

13

מחברת מס' I

מתוך I מחברות

אוניברסיטת תל-אביב TEL AVIV UNIVERSITY

הוראות לנבחנים ולנבחנות (נכתבו בלשון זכר אך נועדו לשני המינים)

לפני התחלת הבחינה מלא את כל הפרטים הבאים בכתב ברור וקרא בעיון את ההוראות:

הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר

תאריך הבחינה 15.6.2016

שם הקורס אלגוריתמים בפעולה

שם המורה פרופ' אורי צוויק, פרופ' חיים קפלן

מס' זיהוי
(העתק מכרטיס הנבחן/התלמיד)

3 1 5 4 6 6 8 1 3

315466813 13
03683169011

לשימוש המורה הבוחן:

הציון 99

המחברת נבדקה ביום ______

חתימת המורה ______

4396629

1	2	3
32	33	33

1. הנך נדרש לשמור על טוהר הבחינה ועל עבודה עצמית ולהישמע להוראות המשגיחים ולנוהלי האוניברסיטה. אין להעתיק, אין לדבר ואין להעביר חומר בין הנבחנים.

נבחן הנוהג בניגוד להוראות צפוי להפסקת בחינתו ולהעמדה לדין משמעתי.

2. על הנבחן להבחן בחדר שבו הוא רשום.
3. אין להחזיק **טלפונים ניידים** או אמצעי תקשורת ומכשירים אלקטרוניים כלשהם בזמן הבחינה. על הנבחן להניח את כל חפציו האישיים בצד החדר הרחק ממקום מושבו.
4. אין להחזיק בהישג יד, בחדר הבחינה או בסמוך לו, כל חומר הקשור לבחינה או לקורס פרט לחומר שהשימוש בו הותר בכתב על ידי המורה.
5. קריאת השאלון מותרת רק לאחר קבלת רשות מהמשגיח.
6. נבחן לא יעזוב את מקומו ולא את חדר הבחינה בטרם סיים את הבחינה ללא קבלת רשות מהמשגיח. בעת יציאה מן החדר, יפקיד הנבחן את מחברות הבחינה והשאלון (טופס הבחינה) בידי המשגיח.
7. נבחן שנכנס לחדר הבחינה וקיבל את השאלון לידיו, לא יהא רשאי לעזוב אותו אלא כעבור חצי שעה לפחות ממועד תחילתה ורק לאחר שיחזיר למשגיח את המחברת **ואת השאלון**, ויקבל ממנו את התעודה המזהה שאותה מסר עם כניסתו לכיתה. נבחן שהחליט לעזוב בלי לכתוב את הבחינה ייחשב כמי שנבחן במועד זה וציונו יהיה "0".
8. אין לכתוב את השם או כל פרט מזהה אחר בתוך המחברת. פרטי הנבחן ימולאו על כריכת המחברת במקום המיועד לכך בלבד.
9. אין לתלוש דפים מהמחברת. טיוטה תיכתב בתוך המחברת בלבד. אין להשתמש בדפים שהביא הנבחן.
10. יש לכתוב את התשובות בעט כחול או שחור, בכתב יד ברור ונקי. בתום הבחינה יחזיר הנבחן את המחברת והשאלון ויקבל מיד המשגיח את התעודה המזהה.
11. **אין לכתוב מעבר לקו האדום משני צידי הדף.**

בהצלחה.

בחרתי בשאלות: 1,2,3

33/33

(3) תיאור: האלג' מאתחל $0<\mu\le\frac{1}{2}$, $w_1^{(1)},\dots,w_n^{(1)}=1$, $W^{(1)}=\sum_{i=1}^{n}w_i^{(1)}=n$

ו- $p^{(1)}=\frac{(w_1^{(1)},\dots,w_n^{(1)})}{W^{(1)}}$.

לאחר שביום ה-t הגיעו מחירים $\underset{\le 1}{\overset{\ge 0}{m^{(t)}}}$ האלג' יעדכן את את המשקלים ליום הבא כך: $w_i^{(t+1)}=w_i^{(t)}\overbrace{(1-\underbrace{\mu m_i^{(t)}}_{\le\frac{1}{2}})}^{\ge\frac{1}{2}>0}$

(ביום הבא יביא את ההתפלגות $p^{(t+1)}=\frac{(w_1^{(t+1)},\dots,w_n^{(t+1)})}{W^{(t+1)}}$

<u>טענה:</u> $\underset{\text{מומחה}}{\forall i}\quad \sum_{t=1}^{T}p^{(t)}\cdot m^{(t)}\le\sum_{t=1}^{T}m_i^{(t)}+\mu\sum_{t=1}^{T}(m_i^{(t)})^2+\frac{\ln n}{\mu}$

<u>הוכחה:</u> נביט ב-

$$\ln\frac{W^{(T+1)}}{W^{(1)}}\overset{\text{טור טלסקופי}}{=}\sum_{k=1}^{T}\ln\frac{W^{(k+1)}}{W^{(k)}}=\sum_{k=1}^{T}\ln\sum_{i=1}^{n}\frac{w_i^{(k+1)}}{W^{(k)}}=$$

$$``\ln\prod_1^n"=``\sum_1^n\ln"$$

$$=\sum_{k=1}^{T}\ln\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\frac{w_i^{(k)}}{W^{(k)}}}_{=p_i^{(k)}}(1-\mu m_i^{(k)})=\sum_{k=1}^{T}\ln\Big[\underbrace{\sum_{i=1}^{n}p_i}_{1\ (\text{התפלגות } p)}-\mu\underbrace{\sum_{i=1}^{n}p_i^{(k)}m_i^{(k)}}_{p^{(k)}m^{(k)}}\Big]=$$

$$=\sum_{k=1}^{T}\ln(1-\mu p^{(k)}m^{(k)})\underset{\ln(1-x)\le -x\ (x\le\frac{1}{2})}{\le}-\mu\sum_{k=1}^{T}p^{(k)}m^{(k)}$$

כל הקורד' של $m^{(k)}$ מוגבלות ב- $[0,1]$ ומוכפלו ב- $p^{(k)}$ זה ממוצע, על כן $p^{(k)}m^{(k)}\le 1$ ולכן $\mu p^{(k)}m^{(k)}\le\frac{1}{2}$

בנוסף: לכל i:

$$\ln\frac{W^{(T+1)}}{W^{(1)}}=\ln\frac{W^{(T+1)}}{n}=-\ln n+\ln W^{(T+1)}\underset{(w_i^{(k)}\ge 0)\ \ W^{(T+1)}=\sum_{i=1}^{n}w_i^{(T+1)}}{\ge}-\ln n+\ln w_i^{(T+1)}=$$

$$\underset{w_i^{(1)}=1}{\overset{``\ln\prod=\sum\ln"}{=}}-\ln n+\sum_{k=1}^{T}\ln(1-\mu\underbrace{m_i^{(k)}}_{\in[0,1]})\underset{-x-x^2\le\ln(1-x)}{\ge}-\ln n-\mu\sum_{k=1}^{T}m_i^{(k)}-\mu^2\sum_{k=1}^{T}(m_i^{(k)})^2$$

כלומר $\forall i\quad -\mu\sum_{k=1}^{T}p^{(k)}m^{(k)}\ge-\ln n-\mu\sum_{k=1}^{T}m_i^{(k)}-\mu^2\sum_{k=1}^{T}(m_i^{(k)})^2$

$\Leftarrow\quad \forall i\quad \sum_{k=1}^{T}p^{(k)}m^{(k)}\le\sum_{k=1}^{T}m_i^{(k)}+\mu\sum_{k=1}^{T}(m_i^{(k)})^2+\frac{\ln n}{\mu}$, כרצוי.

בפרט ל- i המייצג את המומחה הכי טוב

② התפלגות סטציונרית של P': אחידה $U=(\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{n})$

P' היא הפיכה, כי U הפיכה ביחס ל-P'.

נבחין כי P' הוא בדיוק מטרופוליס [למקרה $P_{ij}>0 \iff P_{ji}>0$]

עבור בחירת $\pi=U$ ($\frac{P_{ji}\pi_j}{\pi_{ij}\pi_i} = \frac{P_{ji}}{P_{ij}}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \frac{P_{ji}}{P_{ij}}$)

וראינו כי עבור הגרסה הללו של מטרופוליס ואי פריקה ל-P, כי $\pi(=U)$ היא ההתפלגות הסטציונרית היחידה של P' ושהיא הפיכה ביחס ל-P'.

רק נכון מדויק גם

נראה זאת שוב (למקרה $U=\pi$) יותר בנחת:

נבחין ראשית כי $c\min(b,c)=\min(cb,cc)$ ($c,b,c\geq 0$)

$$P'_{ij} = \begin{cases} P_{ij}\min\{\frac{P_{ji}}{P_{ij}},1\} & i\neq j \wedge P_{ij}>0 \\ 0 & i\neq j \wedge P_{ij}=0 \\ 1-\sum_{k\neq i} P'_{ik} & i=j \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \min\{P_{ji},P_{ij}\} & i\neq j \wedge P_{ij}>0 \\ 0 & i\neq j \wedge P_{ij}=0 \\ 1-\sum_{k\neq i}\min\{P_{ki},P_{ik}\} & i=j \end{cases}$$

נראה כי U סטציונרית ביחס ל-P':

$$(UP')_j = \sum_{i=1}^{n} \overset{\frac{1}{n}}{U_i} P'_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P'_{ij} \overset{\circledast}{=} \frac{1}{n}\Big[\underbrace{\sum_{i\neq j}\min\{P_{ji},P_{ij}\}}_{④} + P'_{jj}\Big] =$$

$$= \frac{1}{n}\Big[\sum_{i\neq j}\cancel{\min\{P_{ji},P_{ij}\}} + 1 - \sum_{k\neq j}\cancel{\min\{P_{kj},P_{jk}\}}\Big] = \frac{1}{n}\cdot 1 = \frac{1}{n} = U_j$$

$\Leftarrow$ $UP'=U$. $\Leftarrow$ $\boxed{U \text{ סטציונרית}}$

⊛ נבע מכך ש- $P_{ij}>0 \iff P'_{ij}>0$ [נובע מהנוסחא, כי אם $P_{ji}>0$ ולכן $\min\{P_{ji},P_{ij}\}>0$ ($\Leftarrow P_{ij}>0$)]. בנוסף בגלל ש- $P'_{ij}=0 \iff P_{ij}=0$ ($\Uparrow$ $P_{ji}=0$)

אז השתמשנו בכך כדי לרשום $0 = P'_{ij} = \min\{\overset{0}{P_{ji}},\overset{0}{P_{ij}}\}=0$ כדי לכלול בסכום ④ על כל $j\neq i$.

מכך ש- $P'_{ij}>0 \iff P_{ij}>0$ אנו מקבלים כי P' גם אי פריקה ולא מחזורית (תכונות התלויות רק בחיוביות ההסתברות) ולכן אכן

שמצאנו U היא ההתפלגות הסטציונרית <u>היחידה</u> של P'.

נראה כעת כי U הפיכה ביחס ל- P';

[נבחין כי $P'_{ij}=0 \iff P_{ij}=0 \iff P_{ji}=0 \iff P'_{ji}=0$]

יהיו $i\neq j$, אם $P'_{ij}=0$ אז גם $P'_{ji}=0$ ובפרט $\underset{0}{U_iP'_{ij}}=\underset{0}{U_jP_{ji}}$

אחרת $P_{ij}>0$ ובפרט $P'_{ji}>0$,

בנוסף ידוע כי $P'_{ij}=\min\{P_{ji},P_{ij}\}$, $P'_{ji}=\min\{P_{ij},P_{ji}\}$

ובפרט: $\underline{U_iP'_{ij}}=\frac{1}{n}\min\{P_{ji},P_{ij}\}=\frac{1}{n}\min\{P_{ij},P_{ji}\}=\underline{U_jP'_{ji}}$

כנדרש.

$\frac{33}{33}$

32/33

① נניח כי n הוא חזקה של 2.

Discrete Fourier Transform זוהי העתקה ליניארית המקבלת

(עבור גודל קלט קבוע n)

קלט $(x_0, \dots, x_{n-1})$ ומחזירה $\left(W_n^{ij} \right) \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$, $W_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$

כלומר $y_j = \sum_{k=0}^{n-1} x_k W_n^{kj}$ $\quad \forall 0 \le j < n$

עבור האלג' נציג כמה חישובים שיוכיחו את נכונות האלג':

$$[DFT(x_0, \dots, x_{n-1})]_j = \sum_{k=0}^{n-1} x_k W_n^{kj} = \sum_{k=0}^{n-1} x_k e^{\frac{2\pi i k j}{n}}$$

שים לב כי $\frac{n-2}{2}$ n חזקה של 2

$$[DFT(\underbrace{x_0, x_2, \dots, x_{n-2}}_{\text{אינדקסים זוגיים}})]_j = \sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} x_{\underset{\uparrow}{2k}} W_{\underset{\uparrow}{\frac{n}{2}}}^{kj} \underset{W_{\frac{n}{2}} = W_n^2}{=} \sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} x_{2k} e^{\frac{2\pi i (2k) j}{n}}$$

אינדקס של האיבר ה-k   כמות האיברים

בכל פעם מצמצמים את הבעיה ל-2 בעיות בגודל $\frac{n}{2}$, תקין כי $n = 2^k$

$$[DFT(\underbrace{x_1, x_3, \dots, x_{n-1}}_{\text{אינדקסים זוגיים}})]_j = \sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} x_{\underset{\uparrow}{2k+1}} W_{\underset{\uparrow}{\frac{n}{2}}}^{kj} = \sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} x_{2k+1} e^{\frac{2\pi i (2k) j}{n}}$$

אינדקס של האיבר ה-k   כמות האיברים

וכן $$W_n^j [DFT(x_1, x_3, \dots, x_{n-1})]_j = e^{\frac{2\pi i j}{n}} \sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} x_{2k+1} e^{\frac{2\pi i (2k) j}{n}} = \sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} x_{2k+1} e^{\frac{2\pi i (2k+1) j}{n}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{[DFT(x_0, \dots, x_{n-1})]_j = [DFT(x_0, x_2, \dots, x_{n-2})]_j + W_n^j [DFT(x_1, x_3, \dots, x_{n-1})]_j \quad \forall 0 \le j < \tfrac{n}{2} \ \text{Ⓐ}}$$

$\cancel{DFT(x_0) = x_0}$ $\cancel{DFT(x_0, x_1) = \begin{pmatrix} x_0 + x_1 \\ x_0 - x_1 \end{pmatrix}}$ האלגוריתם מבוסס על הנוסחה הזאת. עזר בנוסף בעת ש:

$$DFT(x_0) = x_0$$

$$DFT(x_0, x_1) = \begin{pmatrix} x_0 + x_1 \\ x_0 - x_1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{אלג' בעמוד הבא}}$

הערה על ⊛: השגנו את השוויון ב-⊛ רק עבור ערכי j בין 0 ל-$\frac{n}{2}-1$, זאת כי אחרת היינו חורגים מהאינדקסים של ה-DFT הקטנים יותר (בגודל $\frac{n}{2}$). נראה כי עבור $\frac{n}{2} \le j < n$ מתקיים:

$$\boxed{\underset{\forall \frac{n}{2} \le j < n}{[DFT(x_0, \dots, x_{n-1})]_j} = [DFT(x_0, x_2, \dots, x_{n-2})]_{j-\frac{n}{2}} + W_n^j [DFT(x_1, x_3, \dots, x_{n-1})]_{j-\frac{n}{2}}}$$

זה נכון כי

$$e^{\frac{2\pi i (2k)(j-\frac{n}{2})}{n}} = (W_n)^{2kj-kn} \underset{W_n^n=1}{=} (W_n)^{2kj} = e^{\frac{2\pi i (2k) j}{n}}$$

ולכן הביטויים נשארים זהים בחישובים שהובילו ל-⊛.

הא.לג':

```
DFT(x0, x1, ..., xn-1):
{
    if (n=1):
        return x0
    if (n=2)
        return (x0+x1, x0-x1)
    out ← וקטור באורך n
    X ← DFT(x0, x2, ..., xn-2)
    y ← DFT(x1, x3, ..., xn-1)
    X ← (X, X)   ←————— (שרשור של X עם עצמו, כדי לטפל במקרה j ≥ n/2)
    y ← (y, y)
    W ← Wn   ←————— (נעדכן בכל איטרציה ב-O(1) שיגיע Wn^j)
    for j=0,1,...,n-1:
    {
        out_j ← X_j + W y_j      (W = Wn^j)
        W ← W·Wn
    }
    return out
}
```

צריך להתחיל מ-1.

נכונות: בידענו בדוק את החישובים שתיארנו בהתחלה.

זמן ריצה: $\Theta(n \log n)$: זאת כי אם נסמן את זמן הריצה ב-$T(n)$ אז, $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \Theta(n)$, $T(1) = 1$

זאת כי ביצענו 2 קריאות ל-DFT על גודל $\frac{n}{2}$, וכל שאר הפעולות היו ניהול של וקטורים באורך $\Theta(n)$ ולולאה באורך n כאשר כל איטרציה מבצעים $O(1)$ פעולות. ▨

$$\left[DFT(x_0, \ldots, x_{n-1})\right]_j = \sum_{k=0}^{n-1} x_k e^{\frac{2\pi i k j}{n}}$$

$$\left[DFT(x_0, x_2, \ldots, x_{n-2})\right]_{j-\frac{n}{2}} \overset{j \geq \frac{n}{2}}{=} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} x_{2k} e^{\frac{2\pi i (2k)(j-\frac{n}{2})}{n}}$$

$$\shortparallel$$

$$e^{\frac{2\pi i (2k) j}{n}}$$

$$w_n^j \cdot \downarrow =$$

$$e^{\frac{2\pi i (2k)(j-\frac{n}{2})}{n}} \overset{?}{=} e^{\frac{2\pi i (2k) j}{n}}$$

$$e^{\frac{2\pi i (2k)(j-\frac{n}{2})}{n}} = \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^{2kj - nk} = \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^{2kj} = e^{\frac{2\pi i (2k) j}{n}}$$

P אי פריקה ולא מחזורית, $P_{ij} > 0 \iff P_{ji} > 0$

$\Leftarrow$ יש לה התפלגות סטציונרית יחידה π.

$\pi P = \pi$.

$$P'_{ij} = \begin{cases} P_{ij} \min\left\{\frac{P_{ji}}{P_{ij}}, 1\right\} & i \neq j \wedge P_{ij} > 0 \\ 0 & i \neq j \wedge P_{ij} = 0 \\ P_{ii} - \sum_{j \neq i} P'_{ij} & i = j \end{cases}$$

$$\Rightarrow P'_{ij} = \begin{cases} \min\{P_{ji}, P_{ij}\} & i \neq j \wedge P_{ij} > 0 \\ 0 & i \neq j \wedge P_{ij} = 0 \\ 1 - \sum_{i \neq j} \min\{P_{ji}, P_{ij}\} & i = j \end{cases}$$

נראה שההתפלגות האחידה יציבה ל-P'

$$\cancel{(\pi P')_j = \sum_{i=1}^{n} \pi_i P'_{ij}} \quad U = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$$

$$(UP')_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} P'_{ij} = \frac{1}{n}\left[\sum_{i \neq j} \min\{P_{ji}, P_{ij}\} + 1 - \sum_{i \neq j} \min\{P_{ji}, P_{ij}\}\right]$$

P_{ji} אם $0 = P_{ij}$ אז P_{ji}

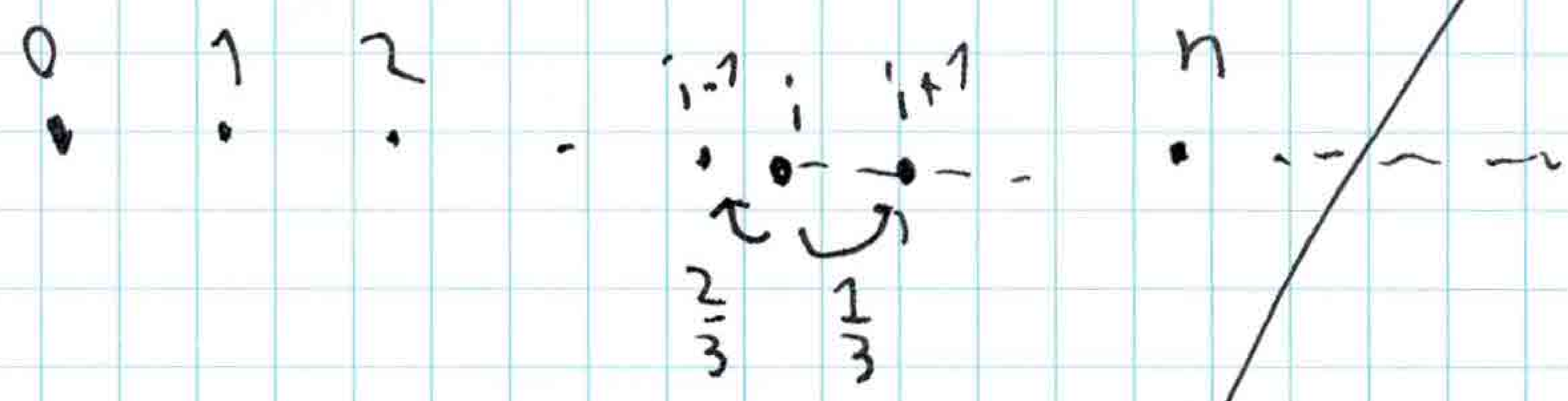
$= \frac{1}{n}$

X_t - מרחק מההשמה המספקת

Y_t - מספרים ב ניסויים מסופקים וכו'

$\Pr(X \ge a) \le \frac{E[X]}{a}$

$a P(X \ge a) \le E[X]$



h_j תוחלת הצעדים להגיע ל-0

$h_0 = 0$

$h_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}[h_2 + 1] = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}[2h_1 + 1] = 1 + \frac{2}{3}h_1 \Rightarrow h_1 = 3$

$h_2 = 2h_1$

$h_k = k h_1 = 3k$

$h_n = 3n$

p_j - הסתב' להגיע ל-0 :

$p_0 = 1$

$p_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot p_1^2 \Rightarrow p_1^2 - 3p_1$

$P(\text{צעדים} \ge 6n) \le \frac{1}{2}$

$\Rightarrow P(\text{צעדים} \le 6n) \ge \frac{1}{2}$

$\parallel$

הצלחה

$w_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$

$y_j = \sum_{k=0}^{n-1} x_k w_n^{kj}$

$[DFT(x_0, \ldots, x_{n-1})$

$= \sum_{k=0}^{\text{"}\frac{n-1}{2}\text{"}} x_{2k} w_n^{2kj} + w^k \sum_{k=0}^{\text{"}\frac{n-1}{2}\text{"}} x_{2k+1} w_n^{2kj}$

$[DFT(x_0, x_2, \ldots, x_{n-2})]_j = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} x_{2k} w_{\frac{n}{2}}^{kj}$

```
DFT( - - - )
  if (n=1)
     x_0
  if (n=2)
     (x_0+x_1, x_0-x_1)
  x ← (DFT( '2|3 ), DFT( '2|3 ))
  y ← (DFT( '2|3'k ), DFT( '2|3'k ))
  w ← w_n
  for j=0....n-1
     out_j ← x_j + w y_j
     w ← w w_n
```

$[DFT(x_0, \ldots, x_{n-1})]_j = \sum_{k=0}^{n-1} x_k w_n^{kj} = \sum_{k=0}^{n-1} x_k e^{\frac{2\pi i k j}{n}}$

$[DFT(x_0, x_2, \ldots, x_{n-2})]_j = \sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} x_{2k} w_{\frac{n}{2}}^{kj} = \sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} x_{2k} e^{\frac{2\pi i (2k) j}{n}}$

$[DFT(x_1, x_3, \ldots, x_{n-1})]_j = \sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} x_{2k+1} w_{\frac{n}{2}}^{kj} = \sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} x_{2k+1} e^{\frac{2\pi i (2k) j}{n}}$

$e^{\frac{2\pi i j}{n}} = w_n^j$

לשימוש המרצה בלבד

טבלה לחישוב ציונים

ציון	שאלה