

מבני נתונים – תרגיל מס' 9

הערה: על כל התשובות להיות מנומקות. לכל אלגוריתם שאתם מציגים יש להוכיח נכונות ולנתח זמן ריצה.

1. תארו אלגוריתם דטרמיניסטי יעיל ככל האפשר המקבל מערך X של n מספרים שונים זה מזה. הניחו ש- n הוא חזקה של 2. על האלגוריתם להחזיר את כל איברי X שדרגתם היא חזקה של 2. כלומר, את המספרים שדרגתם היא $n, n/2, \dots, 4, 2, 1$. (דרגת איבר x ב- X היא מספר האיברים ב- X שקטנים או שווים ל- x).
2. יהא A מערך בעל n מספרים. איבר x יקרא איבר רוב ב- A , אם הוא מופיע יותר מ- $n/2$ פעמים.
 - א. תאר, במודל ההשוואות, אלג' יעיל ככל האפשר שמקבל מערך A בגודל n ומחזיר את איבר הרוב שלו, אם קיים כזה (במידה ואין איבר רוב, על האלג' לדווח על כך).
 - ב. נניח שההשוואות היחידות שניתן לבצע על איבר מערך A הן השוואות מהצורה $x=y$, שיחזירו "כן" אם שני איברים שווים, ו"לא" אחרת. תאר אלג', שסיבוכיותו $O(n \log n)$, שמשמש רק בהשוואות מסוג $=$, שמקבל מערך A בגודל n ומחזיר את איבר הרוב שלו, אם קיים כזה. אם לא קיים, עליו לדווח שאין כזה.
3. בכיתה ראינו אלג' לינארי הממש את פעולת SELECT ע"י חלוקת הקלט לחמישיות.
 - א. האם האלג' ירוץ בזמן לינארי גם אם יחולקו איברי הקלט לקבוצות בנות 7 איברים?
 - ב. מדוע זמן הריצה של SELECT אינו לינארי כאשר החלוקה היא לקבוצות בנות 3 איברים?
4. ענו על שני הסעיפים הבאים.
 - א. תארו מבנה נתונים התומך בפעולות הבאות על קבוצה S מתחום סדור מלא
 - $\text{Median}(S)$: מחזיר את החציון ב- S (אם מס' אברים זוגי – חציון תחתון)
 - $\text{Min}(S)$: מחזיר את האבר הקטן ביותר ב- S
 - $\text{Max}(S)$: מחזיר את האבר הגדול ביותר ב- S
 - $\text{Insert}(x, S)$: מוסיף אבר x ל- S
 - $\text{Delete}(x, S)$: מניחים ש- x נמצא לפני הפעולה ב- S . הפעולה מוציאה את x מ- Sעל הפעולות $\text{median}, \text{min}, \text{max}$ לקחת $O(1)$ זמן במקרה הגרוע, ועל הפעולות insert ו- delete לקחת $O(\log n)$ זמן במקרה הגרוע. כמו כן תארו בקצרה כיצד לבצע כל פעולה.
- ב. שנו במידת הצורך את מבנה הנתונים שהגדרתם בסעיף הקודם כך שנוכל גם למצוא את האלמנט ה- i בגודלו מעל החציון (כלומר ישנם i אלמנטים שגדולים מהחציון וקטנים או שווים לאבר זה) בזמן $O(\log(i))$. תארו במדויק כיצד לבצע פעולה זו.