# לוגיקה למדעי המחשב - פתרון שאלה 5 תרגיל מס' 2

**שאלה 5:** נסמן $A(p)$ פסוק $A$ שיש בו הופעות של פסוק אטומי $p$. יהי $B$ פסוק כלשהו.
נסמן $A\{B/p\}$ את הפסוק המתקבל מ-$A(p)$ על ידי החלפת כל מופע של $p$ ב-$B$.
הוכח את משפט ההחלפה: יהיו $A(p), B, C$ פסוקים ו-$v$ השמה כלשהי.
אם $v(B) = v(C)$ אז $v(A\{B/p\}) = v(A\{C/p\})$.

**תזכורת:**

$$\begin{aligned}
q\{C/p\} &= \begin{cases} C & p = q \\ q & p \neq q \end{cases} \\
(\neg\psi)\{C/p\} &= \neg(\psi\{C/p\})^{\diamondsuit} \\
(\psi \circ \varphi)\{C/p\} &= (\psi\{C/p\}) \circ (\varphi\{C/p\})^{\clubsuit}
\end{aligned}$$

לכל $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

**פתרון:** נוכיח את הטענה הבאה: אם $v(A) = v(B)$ אז לכל פסוק $\varphi$ ופסוק אטומי $p$:
$v(\varphi\{A/p\}) = v(\varphi\{B/p\})$.

נניח $v(A) = v(B)^{\heartsuit}$, נוכיח באינדוקציה על מבנה $\varphi$: $v(\varphi\{A/p\}) = v(\varphi\{B/p\})$.

<u>בסיס האינדוקציה</u>: $\varphi$ הוא פסוק אטומי $q$.
אם $p = q$: $v(\varphi\{A/p\}) = v(A) =^{\heartsuit} v(B) = v(\varphi\{B/p\})$
אם $p \neq q$: $v(\varphi\{A/p\}) = v(q) = v(\varphi\{B/p\})$

<u>הנחת האינדוקציה</u>: לפסוקים $\varphi_1, \varphi_2$ מתקיים$^{\spadesuit}$:

$$\begin{aligned}
v(\varphi_1\{A/p\}) &= v(\varphi_1\{B/p\}) \\
v(\varphi_2\{A/p\}) &= v(\varphi_2\{B/p\})
\end{aligned}$$

<u>צעד האינדוקציה</u>:
מקרה א': $\varphi = (\varphi_1 \circ \varphi_2)$ עבור $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

$$\begin{aligned}
v(\varphi\{A/p\}) = v((\varphi_1 \circ \varphi_2)\{A/p\}) =^{\clubsuit} v((\varphi_1\{A/p\}) \circ (\varphi_2\{A/p\})) = \\
\circ^*(v(\varphi_1\{A/p\}), v(\varphi_2\{A/p\}) =^{\spadesuit} \circ^*(v(\varphi_1\{B/p\}), v(\varphi_2\{B/p\}) = \\
v((\varphi_1\{B/p\}) \circ (\varphi_2\{B/p\})) =^{\clubsuit} v((\varphi_1 \circ \varphi_2)\{B/p\}) = v(\varphi\{B/p\})
\end{aligned}$$

מקרה ב': $\varphi = (\neg\varphi_1)$.

$$\begin{aligned}
v(\varphi\{A/p\}) = v((\neg\varphi_1)\{A/p\}) =^{\diamondsuit} v(\neg(\varphi_1\{A/p\})) = \\
\neg^*(v(\varphi_1\{A/p\})) =^{\spadesuit} \neg^*(v(\varphi_1\{B/p\})) = \\
v(\neg(\varphi_1\{B/p\})) =^{\diamondsuit} v((\neg\varphi_1)\{B/p\}) = v(\varphi\{B/p\})
\end{aligned}$$