מבני נתונים

תרגיל 6, סמסטר ב' תש"ע

ערמות

תור עדיפויות

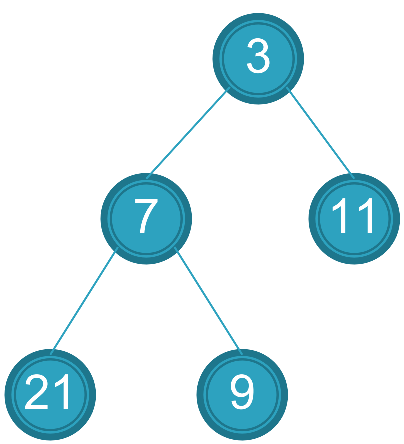
- תור עדיפויות (priority queue) הוא ADT שתומך בפעולות הבאות:
  - Insert(x) – הכנסה של איבר עם מפתח
  - Find-Min() – החזרת האיבר עם המפתח הקטן ביותר
  - Delete-Min() – מחיקת האיבר עם המפתח הקטן ביותר
  - Decrease-Key(x, d) – הפחתת המפתח של x ב-d
- לפעמים מוסיפים גם פעולה למחיקת איבר ולמיזוג שני מבנים

ערמה

- ערמה היא עץ שבו מתקיים כלל הערמה:
  - אם x הוא בן של y אז המפתח של x גדול לפחות כמו המפתח של y
- לערמה כזאת נקרא ערמת מינימום, כדי להדגיש את ההבדל מערמת מקסימום (מוגדרת באופן סימטרי)
- כלל הערמה אוכף סדר על הצמתים בעץ, אבל הסדר לא קשיח כמו בעץ חיפוש
- ערמה מתאימה במיוחד למימוש תור עדיפויות, כי האיבר המינימלי תמיד נמצא בשורש
- במהלך הקורס נראה מספר סוגי ערמות

ערמה בינארית

- ערמה בינארית היא עץ בינארי שלם שמקיים את כלל הערמה
  - הטרמינולוגיה כאן תמיד מבלבלת – שלם, מושלם, מלא – מה ההבדל ביניהם???
- כפי שראינו בהרצאה, קל לממש ערמה כזאת בתוך מערך בלי להעזר במצביעים.



3	7	11	21	9

תרגיל חימום

- האם מערך ממוין מייצג ערמה?

תרגיל 1

- בהינתן אוסף לא ממוין של n איברים, ניתן לבנות מהם ערמה בינארית בזמן $O(n)$ בעזרת פעולת heapify
- נראה שבניית ערמה בינארית בעזרת פעולות insert לוקחת $\Omega(n \log n)$ זמן במקרה הגרוע

פתרון 1

- נחשבו על סדרה "גרועה" ככל האפשר של הכנסות
- כשאיבר מוכנס לערמה בינארית הוא "מפעפע" מעלה למקום שמתאים לו לפי כלל הערמה
- הפעפוע הכי ארוך יהיה לשורש – כאשר האיבר הוא המינימום החדש
- אם האיברים יוכנסו בסדר יורד זה תמיד יקרה, והכנסה תמיד תיקח $\Theta(\log n)$ זמן
- אם ניקח את $n/2$ האיברים האחרונים בסדרה, למשל, נקבל את החסם הדרוש:

$$\Omega((n/2)\log(n/2)) = \Omega(n \log n)$$

תרגיל 2

- נממש "ערמת חציון"
- הפעולות הדרושות הן:
  - Insert בזמן $O(\log n)$
  - Delete-Median בזמן $O(\log n)$
  - Find-Median בזמן $O(1)$

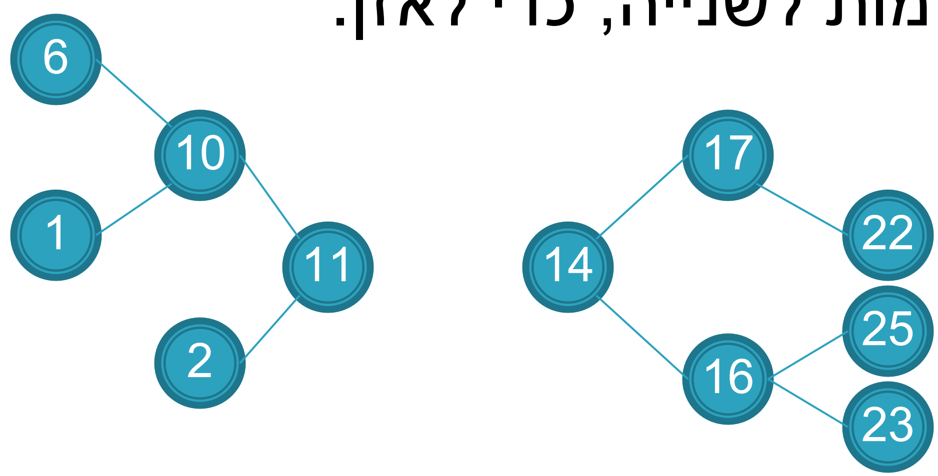
- רגע, מה זה חציון???
  - לצורך השאלה, נניח שאם מספר האיברים הוא זוגי אז החציון הוא אחד משני האיברים האפשריים

שאלה קצרה ממבחן

- בערמת מקסימום, החציון יכול להמצא ב:
  - (כאן הייתה רשימה של אפשרויות – שורש, עלה, בן של השורש)

פתרון 2

- נחזיק את מחצית האיברים שמתחת לחציון בערמת מקסימום, ואת מחצית האיברים שמעל לחציון בערמת מינימום
- החציון יהיה באחד השורשים
- בפעולת Insert יתכן שנצטרך להעביר את האיבר שבשורש אחת הערמות לשנייה, כדי לאזן.



שאלה 3

- נתונים לנו n איברים מחולקים ל-k מערכים ממוינים $A_1, \ldots, A_k$
- כיצד נקבל מערך אחד ממוין B בזמן $O(n \log k)$?

תשובה 3

- בדומה למיון מיזוג
- נחזיק מצביע p_i עבור כל אחד מהמערכים הנתונים A_i, שיתחיל מהאיבר הראשון ויתקדם לפי הסדר
- נחזיק ערמת מינימום ובה k הערכים המוצבעים, נזכור לכל איבר בערמה מאיזה מערך הוא הגיע
- נחזור על הפעולות הבאות n פעמים:
  - נוציא את האיבר הקטן x מהערמה ונכניס אותו לסוף B
  - יהי A_i המערך ממנו הגיע x. נקדם את p_i, ואם לא הגענו לסוף המערך, נכניס לערמה את האיבר החדש אליו הוא מצביע
- הלולאה חוזרת n פעמים, ופעולה על הערמה דורשת $O(\log k)$ זמן, מכאן קיבלנו את זמן הריצה הדרוש