

מושגים בשפות תכנות

תרגיל 1

להגשה עד 01/04/2019

הגשה בקבוצות של 2-3. הנחיות הגשה נמצאות באתר הקורס.

הערה על הוכחות באינדוקציה:

בהוכחות באינדוקציה יש להקפיד על הוכחה מלאה בגבולות הסביר - לא רק לצייר עץ גזירה: יש לציין את הטענה שמוכיחים באינדוקציה, על מה האינדוקציה, חלוקה לבסיס ולצעד (ומה מוכיחים בהם), ועל מה מופעלת הנחת האינדוקציה.

הערה על הוכחות על NOS: אין להשתמש בטענה שהסמנטיקה של NOS היא דטרמיניסטית אלא אם מצוין אחרת.

"הספר" הוא [Nielson & Nielson של Semantics with Applications](#).

שאלה 1

נרצה להוסיף לשפת While ביטויים למניפולציה של מולטי-קבוצות סופיות מעל המספרים הטבעיים. כזכור, במולטי קבוצה יש חשיבות למספר הפעמים שאיבר מופיע אבל לא לסדר.

למשל הביטוי $\{ \}$ ייצג את הקבוצה הריקה, $\{5,2,2\}$ את הקבוצה שמכילה את המספר 5 ואת 2 פעמיים;

$\{4,\{2,3\},1\}$ את הקבוצה שמכילה את 1, 4, והקבוצה שמכילה את 2 ו-3;

$\{ \}$ היא הקבוצה הריקה, ו- $\{ \}$ היא הקבוצה שמכילה את הקבוצה הריקה.

א. כתבו דקדוק חסר הקשר שגוזר non-terminal בשם H לקבוצת הביטויים הנ"ל. אפשר להשתמש ב-non-terminal נוסף (ומומלץ להשתמש בהתגלמות שלו גם ביתר הסעיפים).

ב. כתבו הגדרה של הקבוצה H ע"י הגדרה אינדוקטיבית בעזרת כללי היסק.

ג. הגדירו בהגדרה אינדוקטיבית פונקציה שסוכמת את כל האיברים שמופיעים במולטי-קבוצה בקינון כלשהו. למשל,

$$\text{sum}(\{1,\{2,2\},\{\{3\}\}) = 1 + 2 + 2 + 3 = 8$$

$$\text{sum}(\{ \}, \{ \{ \} \}) = 0$$

ד. הגדירו בהגדרה אינדוקטיבית פונקציה שסופרת את מספר האיברים במולטי-קבוצה בקינון כלשהו. למשל,

$$\text{count}(\{1,\{2,2\},\{\{3\}\}) = 4$$

$$\text{count}(\{ \}, \{ \{ \} \}) = 0$$

ה. הגדירו בהגדרה אינדוקטיבית את קבוצת המולטי-קבוצות כנ"ל שבהן לא מופיעים מספרים טבעיים פרט ל-1, נסמנה J.

למשל, $\{\{1\},1\}$ היא קבוצה ב-J, וגם $\{ \}$, אבל לא $\{2,1\}$. (אפשר להשתמש בכל צורת הגדרה אינדוקטיבית שלמדנו.)

הוכיחו ש-J היא תת קבוצה של H שהגדרתם בסעיף א.

ו. הוכיחו באינדוקציה שכל קבוצה a ב-J מתקיים:

$$\text{count}(a) = \text{sum}(a)$$

שאלה 2

א. נתון הדקדוק חסר ההקשר:

$$E1 ::= \varepsilon \mid \text{id} \mid (E1)$$

הסימן ε מייצג את המחזורות הריקה, ו-id היא מחזורות.

הוכיחו שבכל ביטוי בשפה של $E1$, מספר הסוגריים הימניים שווה למספר הסוגריים השמאליים.

ב. נתון הדקדוק חסר ההקשר:

$E2 ::= \varepsilon \mid id \mid (R$
 $R ::=) \mid E2)$

הוכיחו שבכל ביטוי בשפה של $E2$, מספר הסוגריים הימניים שווה למספר הסוגריים השמאליים.

ג. הוכיחו ששני הדיקדוקים מסעיפים א' וב' מגדירים את אותה שפה, $E1=E2$.
רמז: בכיוון ההכלה הקשה, נסחו את טענת האינדוקציה על עצי גזירה בזהירות, ועם חיזוק שמתייחס ל- R .

שאלה 3

להלן דקדוק חסר הקשר לחלק משפת JSON (JavaScript Object Notation):

$obj ::= \{ \} \mid \{ members \}$
 $members ::= keyvalue \mid members , members$
 $keyvalue ::= string : value$
 $value ::= string \mid int \mid obj$

א. האם המילים הבאות נמצאות בשפה של הדקדוק הנ"ל? אם כן, הראו עץ גזירה שמוכיח זאת, אם לא, הוכיחו שאין עץ גזירה כזה:

- A. $\{ "course": "concepts in PL", "ex": 1, "grade": 100 \}$
- B. $\{ "course": "concepts in PL", "ex": 1, "grade": \{ 100 \} \}$

הערה: הניחו שמחרוזות בגרשיים מתורגמות לטוקן $string$, ומספרים שלמים לטוקן int .

ב. הראו שהדקדוק הוא רב משמעי ע"י מציאת שני עצי גזירה שונים לאותה מילה.

שאלה 4

א. הוכיחו את השקילות הסמנטית הבאה ב Natural Operational Semantics:

$(S1;S2);S3 \sim S1;(S2;S3)$

ב. הוכיחו שבמקרה הכללי לא מתקיימת השקילות

$S1;S2 \sim S2;S1$

כלומר קיימים $S1, S2$ כך שהשקילות לא מתקיימת. (יש להוכיח שהשקילות לא מתקיימת).

שאלה 5

נרצה להוסיף לשפת While את הפקודה הבאה:

do S while b

זוהי לולאה שתמיד מתבצעת פעם אחת לפחות, והביצוע שלה נפסק כאשר התנאי b אינו מתקיים.
לדוגמה, הקוד הבא:

do $x := x-10$ while $x > 10$

יסתיים במצב בו $x=5$ אם יתחיל במצב בו $x=55$, ויסיימו במצב בו $x=-3$ אם יתחיל במצב בו $x=7$.

a. הוסיפי כללים (ים) לטבלה 2.1 בספר שיגדירו את ה Natural Operational Semantics של פקודת while. הכללים אינם יכולים להסתמך על מבנה לולאת while בשפה - כלומר לא ניתן להתייחס בכללים הקיימים למבנה לולאת while, רק ללולאת do while.

b. הוכיחי את השקילות הסמנטית הבאה ב Natural Operational Semantics המורחב ע"י הכללים (ים) שהגדרת בסעיף a:

$\text{do } S \text{ while } b \sim S ; \text{if } b (\text{do } S \text{ while } b) \text{ else skip}$

שאלה 6

הוכיחו (עבור הכללים שהגדרתם בשאלה הקודמת) ב-Natural Operational Semantics מתקיים
 for all s, s' . $\langle \text{do } S \text{ while } b, s \rangle \rightarrow s' \Rightarrow \langle S ; \text{while } b \text{ do } S, s \rangle \rightarrow s'$
 שימו לב שצד ימין משתמש בלולאת while הקיימת, בעוד צד שמאל ב-construct החדש שהגדרתם.

רמז: המקרה הקשה מצריך אינדוקציה על הגזירה (אינטואיטיבית זו אינדוקציה על מספר האיטרציות של הלולאה עד שהיא מסתיימת).

בנוס: הוכיחו גם גרירה בכיוון השני, כך שסה"כ מקבלים את השקילות הבאה ב-NOS:
 $\text{do } S \text{ while } b \sim S ; \text{while } b \text{ do } S$

שאלה 7 (בנוס)

לכל שפה רגולרית קיים דקדוק חסר הקשר. הוכיחו באינדוקציה מבנית על ביטויים רגולריים.

בהצלחה!