הגדרות אינדוקטיביות

נגדיר את הקבוצה N (המספרים הטבעיים)

ע"י דקדוק חסר הקשר:

$$N ::= 0 \mid s(N)$$

דרך נוספת לרשום את אותו הדקדוק:

$$N \to 0$$

$$N \to s(N)$$

דרך שקולה היא להגדיר את N ע"י כללי היסק:

$$\text{zero}_N \ \frac{}{0 \in N}$$

$$\text{succ}_N \ \frac{x \in N}{s(x) \in N}$$

בהגדרה אינדוקטיבית, הקבוצה המוגדרת היא הקבוצה <u>המינימלית</u> שסגורה תחת הכללים.

נגדיר קבוצה נוספת M:

$$M ::= 0 \mid s(0) \mid s(s(M))$$

ובאופן שקול:

$$zero_M \quad \frac{\quad}{0 \in M}$$

$$one_M \quad \frac{\quad}{s(0) \in M}$$

$$succ_M \quad \frac{x \in M}{s(s(x)) \in M}$$

<u>טענה:</u> $N = M$

נוכיח ע"י הוכחת הכלה דו-כיוונית.

<u>כיוון I: $M \subseteq N$</u>

נוכיח באינדוקציה (על M) את הטענה:

$$\forall x \in M .\ x \in N$$

1) הכלל $zero_M$:

צריך להוכיח $0 \in N$. זה נובע מהעץ:

$$zero_N \; \dfrac{}{0 \in N}$$

2) הכלל one_M:

צריך להראות $s(0) \in N$. זה נובע מהעץ:

$$succ_N \; \dfrac{zero_N \; \dfrac{}{0 \in N}}{s(0) \in N}$$

3) הכלל $succ_M$:

מהנחת האינדוקציה נקבל $x \in N$,

וצריך להראות $s(s(x)) \in N$. זה נובע מהעץ:

$$succ_N \; \dfrac{succ_N \; \dfrac{x \in N}{s(x) \in N}}{s(s(x)) \in N}$$

וסיימנו את הכיוון הראשון.

כיוון II: $N \subseteq M$

אינדוקציה פשוטה על איברי N עם הטענה $\forall x \in N.\ x \in M$ לא עובדת. נראה שתי דרכים אחרות שכן עובדות.

דרך א': חיזוק טענת האינדוקציה

נוכיח באינדוקציה על איברי N את הטענה:

$$\forall x \in N.\ x \in M \wedge s(x) \in M$$

1) הכלל $zero_N$:

צריך להוכיח $0 \in M$ וגם $s(0) \in M$.

הנה שני עצים שמראים זאת:

$$zero_M\ \frac{}{0 \in M} \qquad one_M\ \frac{}{s(0) \in M}$$

2) הכלל $succ_N$:

~~מ~~ מהנחת האינדוקציה נקבל:

א) $x \in M$ ב) $s(x) \in M$

וצריך להראות ש $s(x) \in M$ וגם $s(s(x)) \in M$.

הראשון נובע מהנחת האינדוקציה (ב')

והשני נובע מהעץ הבא:

הנחת האינדוקציה א'

$$succ_M\ \frac{x \in M}{s(s(x)) \in M}$$

דרך ד': אינדוקציה על ידי גזירה

נוכיח באינדוקציה על ידי גזירה של N את הטענה הבאה: $\forall x\in N.\ x\in M$.

1) הכלל $zero_N$:
$$\frac{}{0\in M}\ zero_M$$

2) הכלל $succ_N$:

נסתכל על הגזירה שמובילה ל $s(x)\in N$:

$$\boxed{}\ \cfrac{\cfrac{\vdots}{x\in N}}{s(x)\in N}\ succ_N$$

נפרד למקרים, לפי הכלל $\boxed{}$ שמוביל אחרון בעץ שמוביל ל $x\in N$.

i) מקרה $\boxed{zero_N}$:

במקרה זה $x=0$ ועלינו להראות $s(0)\in M$. זה נובע מהעץ:
$$\frac{}{s(0)\in M}\ one_M$$

ii) מקרה $\boxed{succ_N}$:

במקרה זה $x=s(y)$ ועלינו

להראות ש $s(x)=s(s(y))\in M$.

מהנחת האינדוקציה אנו יודעים שכל

איבר של N שנוצר ע"י עץ

גזירה שהוא תת-עץ של העץ

הנ"ל (שמוביל ל $s(x)\in N$) הוא איבר של M.

בפרט, $y\in M$, ולכן:

$$succ_M\ \frac{y\in M}{s(s(y))\in M}$$

בזאת סיימנו את ההוכחה.

ביטויים אריתמטיים

נגדיר את הקבוצה E ע"י דקדוק:

$$E ::= n \mid E + E \mid E \times E \mid (E)$$

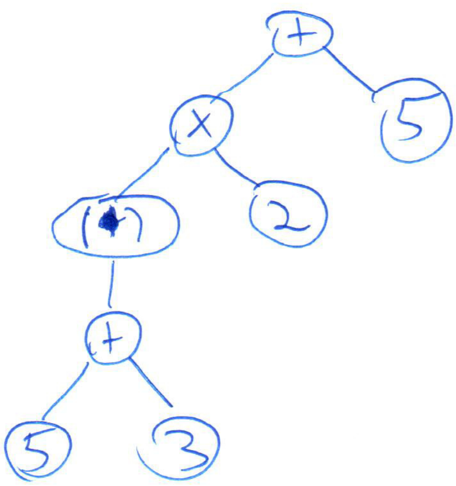
הגדרה זו שקולה לכללי ההיסק הבאים:

$$\frac{}{n \in E} \qquad \frac{e_1 \in E \quad e_2 \in E}{e_1 + e_2 \in E} \qquad \frac{e_1 \in E \quad e_2 \in E}{e_1 \times e_2 \in E} \qquad \frac{e \in E}{(e) \in E}$$

הביטוי $(5+3)\times 2+5$ נגזר בשפה E,

כאשר כל מספר (ליטרל) מתורגם לטוקן n.

ניתן לראות זאת ע"י העץ הבא:



בביטוי זה יש ארבעה ליטרלים,

ושלוש פעולות חשבוניות.

נרצה להגדיר באופן פורמלי פונקציה

$$lits : E \to \mathbb{N}$$

שתספור את מספר הליטרלים בביטוי, ופונקציה

$$ops : E \to \mathbb{N}$$

שתספור את מספר הפעולות החשבוניות, כלומר כפל או חיבור (ולא סוגריים).

מאחר ש E מוגדרת ע"י הגדרה אינדוקטיבית, ניתן להגדיר את הפונקציות ברקורסיה, שתתאים להגדרה של E:

<u>הפונקציה lits</u>:

$$lits(n) = 1$$
$$lits(e_1 + e_2) = lits(e_1) + lits(e_2)$$
$$lits(e_1 \times e_2) = lits(e_1) + lits(e_2)$$
$$lits((e)) = lits(e)$$

<u>הפונקציה ops</u>:

$$ops(n) = 0$$
$$ops(e_1 + e_2) = ops(e_1) + ops(e_2) + 1$$
$$ops(e_1 \times e_2) = ops(e_1) + ops(e_2) + 1$$
$$ops((e)) = ops(e)$$

<u>טענה:</u> $\forall e \in E.\ lits(e) \geq ops(e)$

הטענה נכונה, אך הוכחה באינדוקציה על אורך E נכשלת.

לדוגמה, במקרה e_1+e_2 מהנחת האינדוקציה מקבלים:

$$lits(e_1) \geq ops(e_1)$$
$$lits(e_2) \geq ops(e_2)$$

וצריך להראות:

$$\underbrace{lits(e_1+e_2)}_{= lits(e_1)+lits(e_2)} \geq \underbrace{ops(e_1+e_2)}_{= ops(e_1)+ops(e_2)+1}$$

אבל במקרה שכזה נכשל (כי מ $x \geq y$, $x' \geq y'$ לא נובע $x+x' \geq y+y'+1$).

הדרך להוכיח את הטענה היא להוכיח באינדוקציה טענה חזקה יותר:

$$\forall e \in E.\ lits(e) > ops(e)$$

עם טענה זו כל המקרים עובדים
בקלות.

הבדל בין אובייקטים סינטקטיים וסמנטיים

בהגדרה ובהוכחות הקודמות השתמשנו
בסימן + בשני מובנים שונים לחלוטין.
לדוגמה, ה + ב e_1+e_2
הוא סימן סינטקטי (תחבירי).
לעומת זאת, ה + ב:
$$ops(e_1) + ops(e_2) + 1$$
הוא פונקציית החיבור על $\mathbb{N}$ -
אובייקט סמנטי.
כמובן שזה לא בדרך מקרה.
בסמנטיקה של ביטויים אריתמטיים
הסמנטיקה של הסמל + תהיה הפונקציה +.
עם זאת, חשוב מאוד לשים לב
להבדל בין אובייקטים סינטקטיים וסמנטיים.