קבוצות ב"ת בקמירות

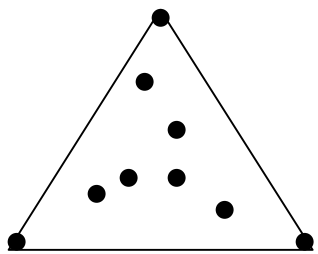
- מאת:יובל רוכמן
- הוגש כעבודה בסמינר "גאומטריה דיסקרטית"

הגדרות

- תהא $X \subseteq R^2$ קבוצה של נקודות שנמצאות במצב כללי (אין 3 נקודות בישר אחד).
- נסתכל על כל הנקודות ב X הנמצאות על השפה של $conv(X)$

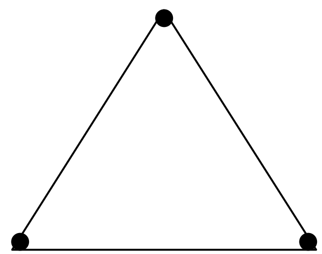
לנקודות אלו נקרא "**נקודות השפה של X**"

- כל שאר הנקודות ב X תקראנה **נקודות פנימיות**
- לדוגמא :

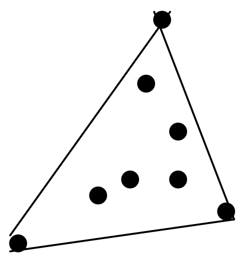


מוטיבציה

- אם נוציא את כל הנקודות הפנימיות מ X אזי הקמור שלנו לא ישתנה
- לדוגמא,



- לעומת זאת, אם נוציא נקודת שפה אחת מ X הקמור שלנו ישתנה
- לדוגמא



מסקנה

- הנקודות היחידות שמשפיעות על הקמור של X הן נקודות השפה
- לכן, אם נחקור קבוצות, שכל הנקודות שלהן הן נקודות השפה, אז נקבל תוצאות מעניינות גם על הקמור של קבוצה מסוימת X

קבוצות ב"ת בקמירות

- **<u>הגדרה:</u>** נאמר שקבוצה R^2 $X \subseteq$ היא בלתי תלויה במצב קמור (convex independent) אם לכל $x \in X$ מתקיים ש $x \notin conv(X \setminus \{x\})$
- הגדרה זו שקולה לכך היא שX מכילה אך ורק את נקודות השפה

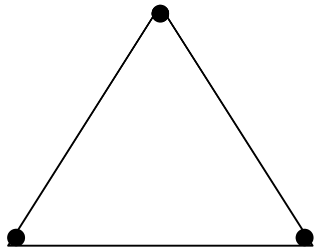
טענה

- **טענה:** אם X ב"ת ונניח ש $X \subseteq Y$ אזי Y היא ב"ת
- **הוכחה:** (בשלילה) נניח ש Y אינה ב"ת. אזי ל Y יש נקודה פנימית, ומשום ש $X \subseteq Y$ אזי גם X אינו ב"ת - סתירה

משפט Erdos-Szekeres

- **משפט Erdos-Szekeres:** לכל k טבעי,יש מספר n(k) כך שכל קבוצה $X \subseteq R^2$ בגודל n(k), שנמצאת במצב כללי, מכילה תת-קבוצה ב"ת בגודל k.
- אנו חייבים לדרוש שהקבוצה תהיה במצב כללי, אחרת המשפט לא נכון (ניקח קבוצה X שכל הנקודות שלה נמצאות על ישר אחד. הקמור של כל תת-קבוצה של X יהיה קטע, ולכן כמות נקודות הקמור תהיה 2)
- כמו כן, נוכל לדרוש שכל הנקודות בקבוצה X לא תהיה להן את אותה קואורדינטה x (נוכל לסובב את הקבוצה X)

דוגמאות



- ל$k=3$ מספיק לבחור $n(k)=3$.
- ל$k=2$?

משפט Erdos-Szekeres

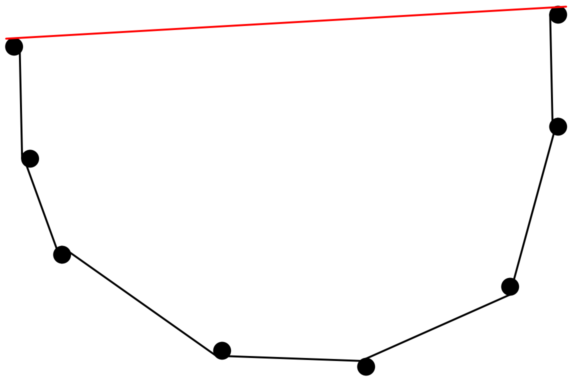
<u>הוכחה :</u>

- לצורך ההוכחה, נגדיר שני הגדרות חשובות:

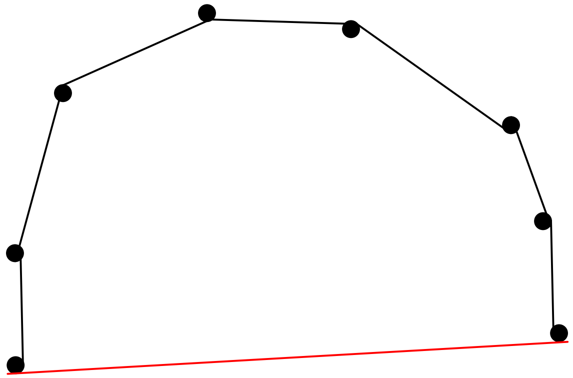
1. קבוצה X תיקרא ספל, אם X ב"ת ויש קשת שמחברת בין שני נקודות בX שחוסמת אותה מלמעלה(נקרא לקשת הזאת הקשת החוסמת)
2. קבוצה X תיקרא כובע, אם X ב"ת ויש קשת שמחברת בין שני נקודות בX שחוסמת אותה מלמטה

דוגמאות לספל וכובע

דוגמא לספל:

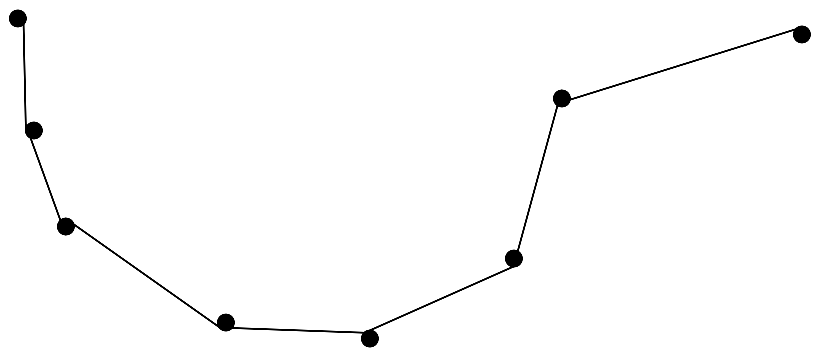


דוגמא לכובע:



דוגמאות לספל וכובע

<u>האם זה ספל?:</u>



משפט Erdos-Szekeres

נחזור להוכחה שלנו

הוכחה (המשך): נסמן $f(k,l)$ להיות המספר המינימלי המקיים שלכל קבוצה X בגודל זה,או שיש לה ספל בגודל k או כובע בגודל l

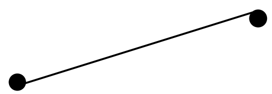
- ברור כי אם נוכיח ש $f(k,l)$ חסום אז נוכיח את המשפט (וכמו כן $n(k)$ קטן שווה מ$f(k,k)$)

משפט Erdos-Szekeres

<u>הוכחה (המשך) :</u> נוכיח באינדוקציה ש

$$f(k,l) \le \binom{k+l-4}{k-2} + 1$$

לk=2 או לl=2

- בקטע  יש ספל וכובע בגודל 2

משפט Erdos-Szekeres

הוכחה (המשך) :

אם נוכיח שלכל קבוצה בגודל $N = f(k,l-1) + f(k-1,l) - 1$

יש ספל בגודל k או כובע בגודל l אזי בפרט מתקיים ש

$$f(k,l) \le N = f(k,l-1) + f(k-1,l) - 1 \le$$

$$\le \binom{k+l-5}{k-2} + 1 + \binom{k+l-5}{k-3} + 1 - 1 =$$

$$\binom{k+l-5}{k-2} + \binom{k+l-5}{k-3} + 1 = \binom{k+l-4}{k-2} + 1$$

משפט Erdos-Szekeres

<u>הוכחה (המשך) :</u> יהא X קבוצה בגודל N. נניח כי בX אין כובע בגודל l. נסמן בE את כל ה $x \in X$ כך שיש ספל בגודל k-1 המסתיים בנקודה x

נשים לב ש $|X \setminus E| < f(k-1,l)$ כיוון שX\E לא מכיל אף ספל בגודל k-1 (אם יש ספל שמוכל בX\E, אז הספל מוכל גם בX, ולכן הנקודה x שנמצאת בסוף הספל נמצאת גם בX ולכן גם ב E ← סתירה כי הנקודה x נמצאת גם ב X\E) וגם היא לא מכילה כובע בגודל l (אחרת גם X מכיל כובע בגודל l)

משפט Erdos-Szekeres

<u>הוכחה (המשך) :</u> לכן $|X \setminus E| \leq f(k-1,l)-1$

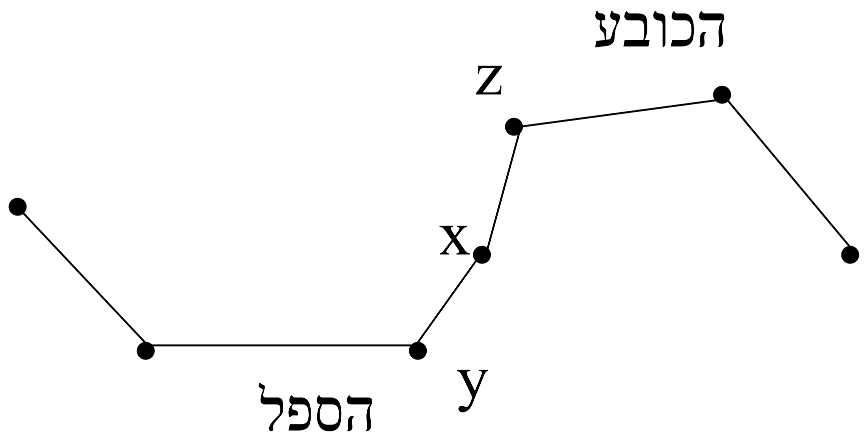
כלומר $|E|=|X|-|X \setminus E| \geq N-f(k-1,l)+1=f(k,l-1)$

ולכן E מכיל ספל בגודל k או כובע בגודל l-1.

אם E מכיל ספל בגודל k אז גם X מכיל ספל בגודל k וסיימנו.לכן נניח שE מכיל כובע בגודל l-1. נניח שx היא נקודת ההתחלה של הכובע ההוא. אז לפי הגדרת E היא גם נקודת סיום של ספל בגודל k-1 בX

משפט Erdos-Szekeres

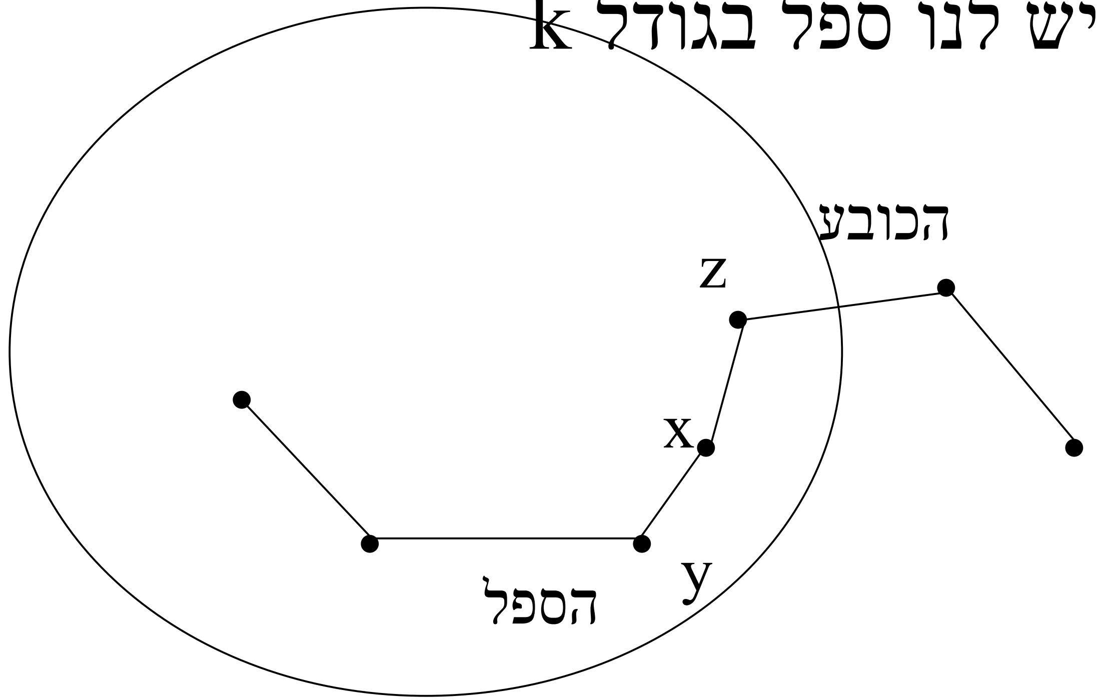
הוכחה (המשך) : נניח כי z היא הנקודה השניה בכובע,
וy היא הנקודה הלפני אחרונה בספל



משפט Erdos-Szekeres

__הוכחה (המשך) :__ כעת יש שני אפשרויות:

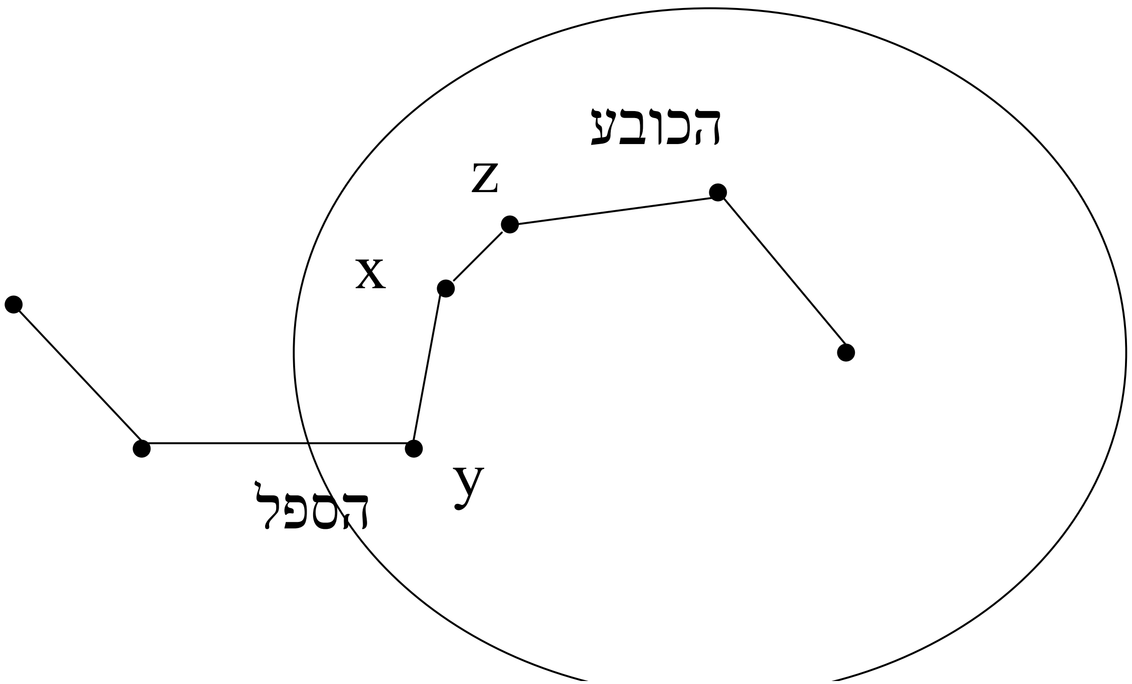
1) השיפוע של xz גדול מהשיפוע של xy. אם זה כך,
אזי יש לנו ספל בגודל k



משפט Erdos-Szekeres

<u>הוכחה (המשך) :</u>

2) השיפוע של xz קטן מהשיפוע של xy . אם זה כך,
אזי יש לנו כובע בגודל 1



משפט Erdos-Szekeres

הוכחה (המשך) : למה לא יתכן שהשיפוע של xy= שיפוע של xz?

מסקנה ממשפט Erdos-Szekeres

נשים לב, שמתקיים ש $n(k) \le \binom{2k-4}{k-2} + 1$

וידוע מנוסחת סטירלינג ש $\binom{2k-4}{k-2} \sim \frac{4^{k-2}}{\sqrt{\pi(k-2)}}$

בפרט, לכל k טבעי דיי גדול מתקיים ש

$$n(k) < 4^k$$

ולכן,נובע כי לכל קבוצה במצב כללי בגודל k מתקיים

שיש לו תת-קבוצה ב"ת בגודל $\Omega(\log k)$!!!!!!

חורים

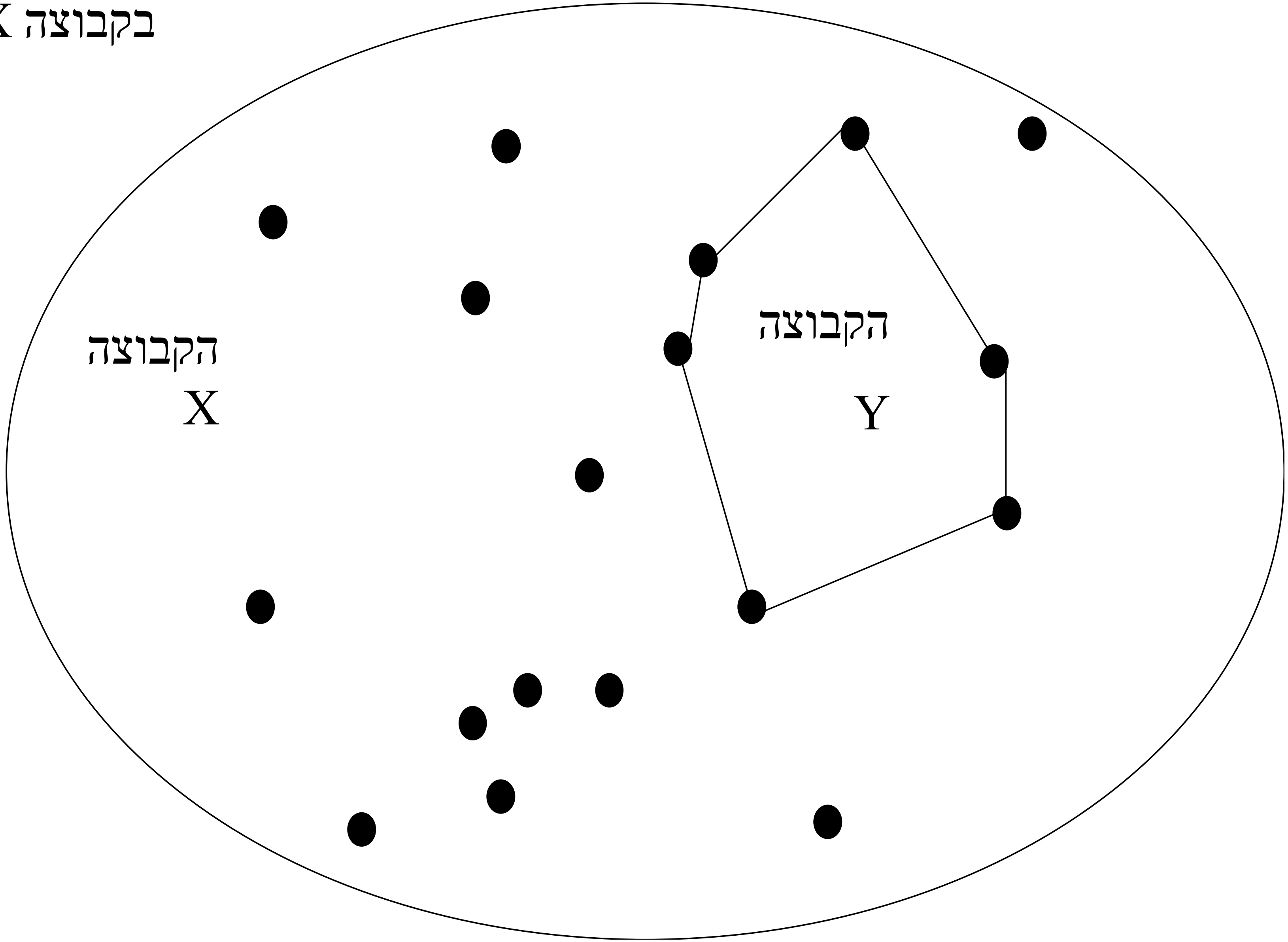
הגדרה

- תהא X קבוצה ב R^2. נאמר כי $X \subseteq Y$ חור בגודל k בX אם Y ב"ת ו $conv(Y) \cap X = Y$
- כלומר, Y היא קבוצה שמוכלת בX כך שבתוך הקמור של Y(לא כולל השפה) אין אף נקודה של X (ושל Y)

דוגמא

Y חור בגודל 6

בקבוצה X



שאלה

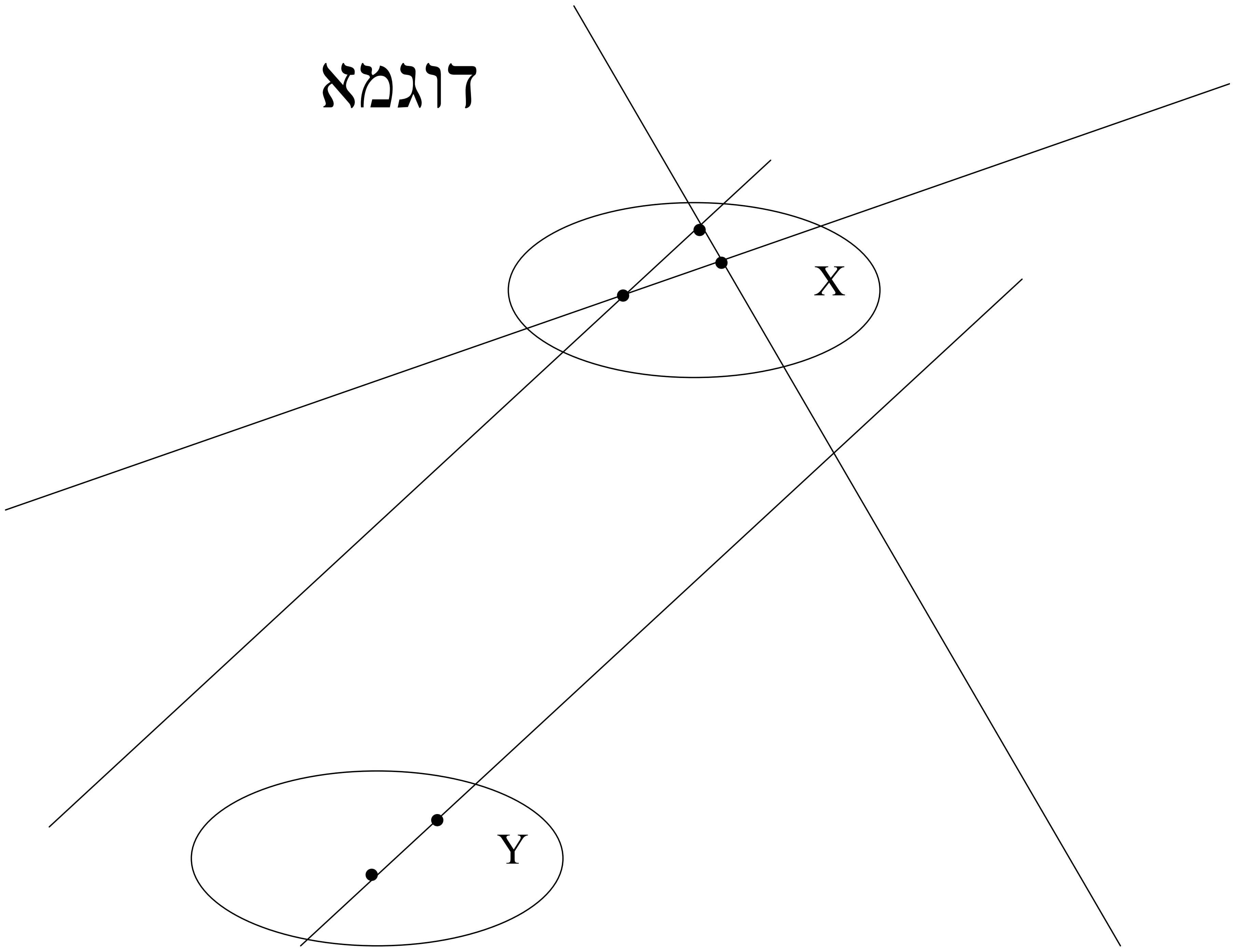
- האם לכל מספר k, יש מספר n(k), כך שלכל קבוצה במצב כללי בגודל n(k) יש חור בגודל k?
- תשובה:לא!
- ל k=7 לא מתקיימת הטענה.

X מעל קבוצה Y

- נאמר כי קבוצה X היא מעל קבוצה Y אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. כל ישר שעובר דרך כל שתי נקודות בX הוא מעל לכל הנקודות בקבוצה Y
2. כל ישר שעובר דרך כל שני נקודות בY הוא מתחת לכל הנקודות בקבוצה X
3. לכל הנקודות ב$X \cup Y$ יש קורדינטה x שונה

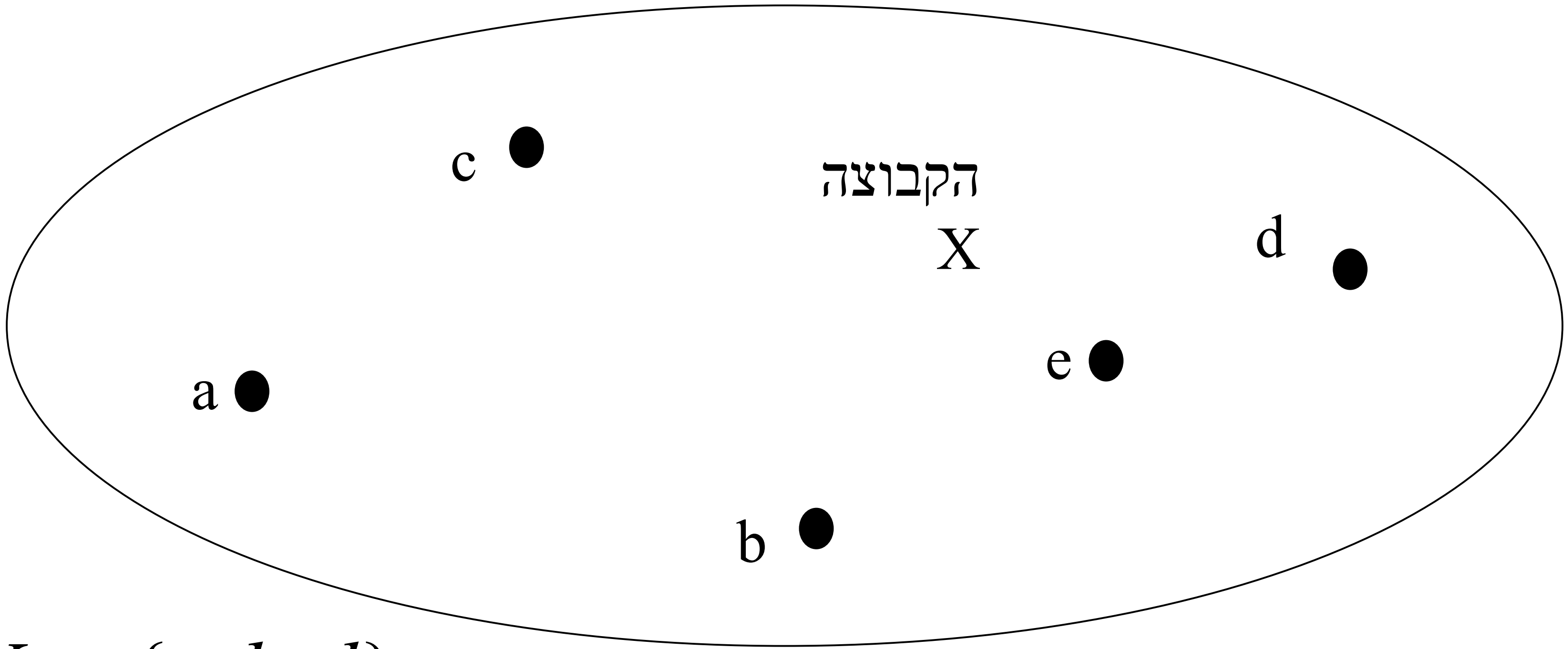
דוגמא



קבוצות ה X_i של X

- תהא X קבוצה כך שאין בה אף נקודה עם אותה קורדינטה x. נניח כי $X=\{p_1,p_2,\dots.,p_n\}$ כאשר קורדינטת הx של p_i קטנה מקורדינטת הx של p_{i+1} (כלומר הנקודות ממוינות בסדר עולה לפי קורדינטת הx)
- אנו נגדיר את הקבוצה ה X_0 של X כך שתהיה הקבוצה $X_0=\{p_2,p_4,\dots\}$
ואת הקבוצה ה X_1 של X להיות הקבוצה
$$X_1=\{p_1,p_3,\dots\}$$

דוגמא



$$X_1 = \{a, b, d\}$$

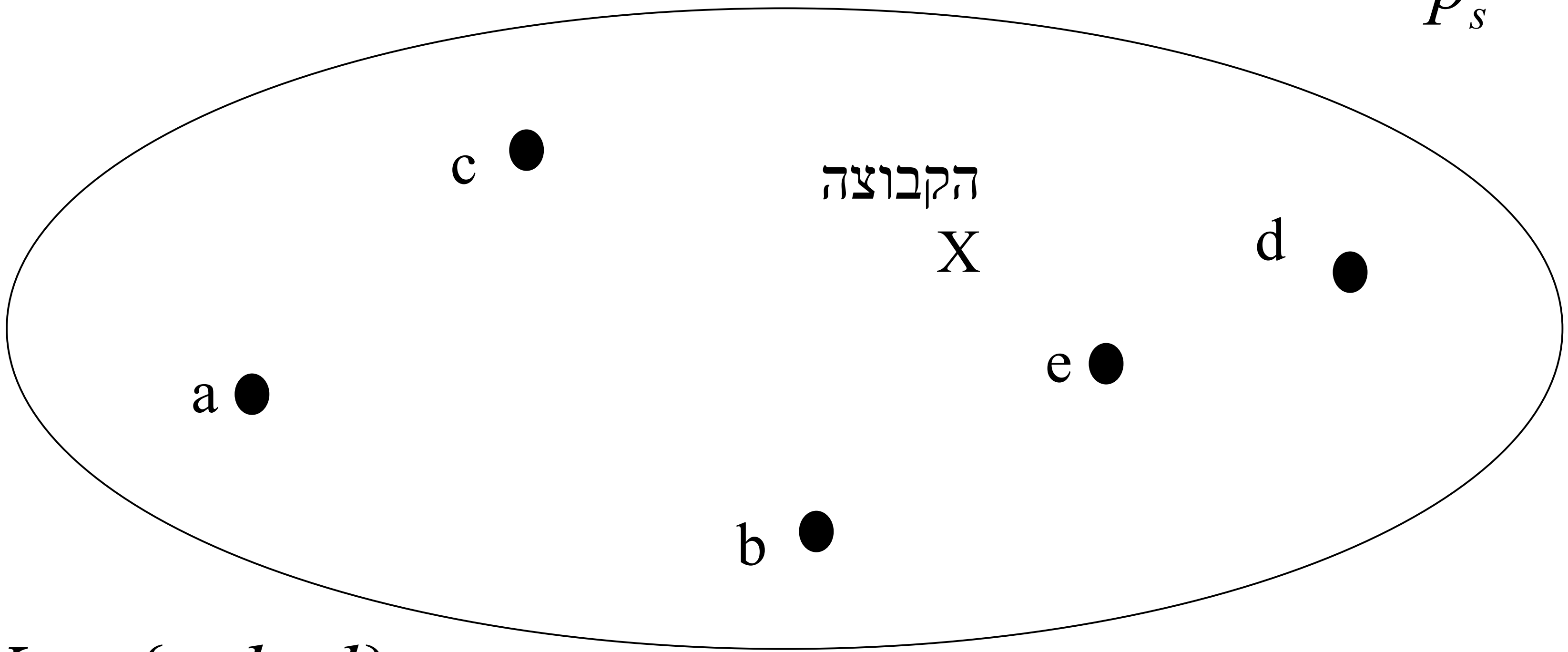
$$X_0 = \{c, e\}$$

דוגמא

נשים לב שלכל $p_j, p_k \in X_1$

יש $p_s \in X_0$ **כך שקואורדינטת**

הx של p_s **תהיה בין** p_j **ל** p_k



$$X_1 = \{a, b, d\}$$

$$X_0 = \{c, e\}$$

לדוגמא, בין a,b יש את

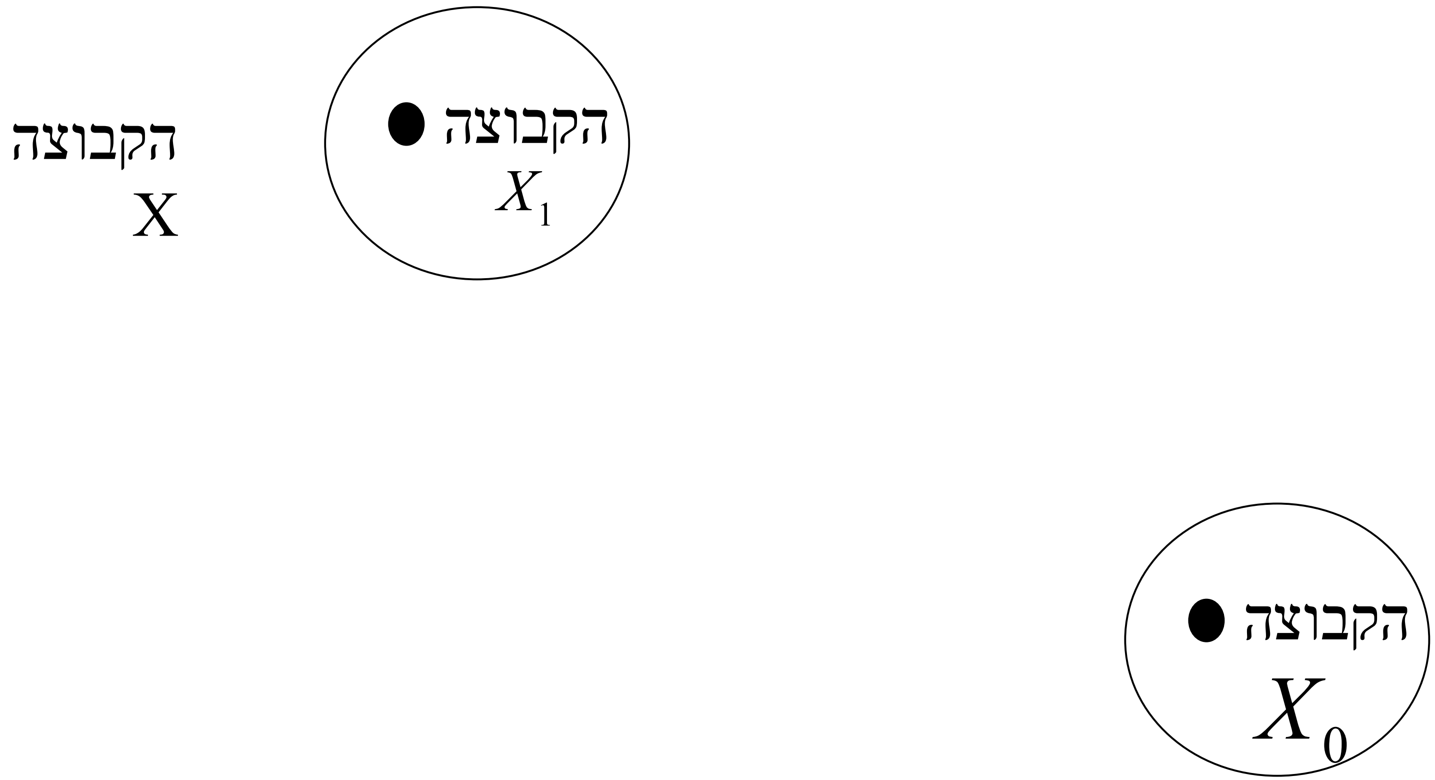
הנקודה c שנמצאת ב X_0

קבוצות הורטון

- תהא X קבוצה במצב כללי,ותהיינה X_1 ו X_0 קבוצות ה X_i של X. נאמר כי X היא קבוצת הורטון(Horton) אם מתקיים:
  - X הוא הקבוצה הריקה או נקודה בודדת

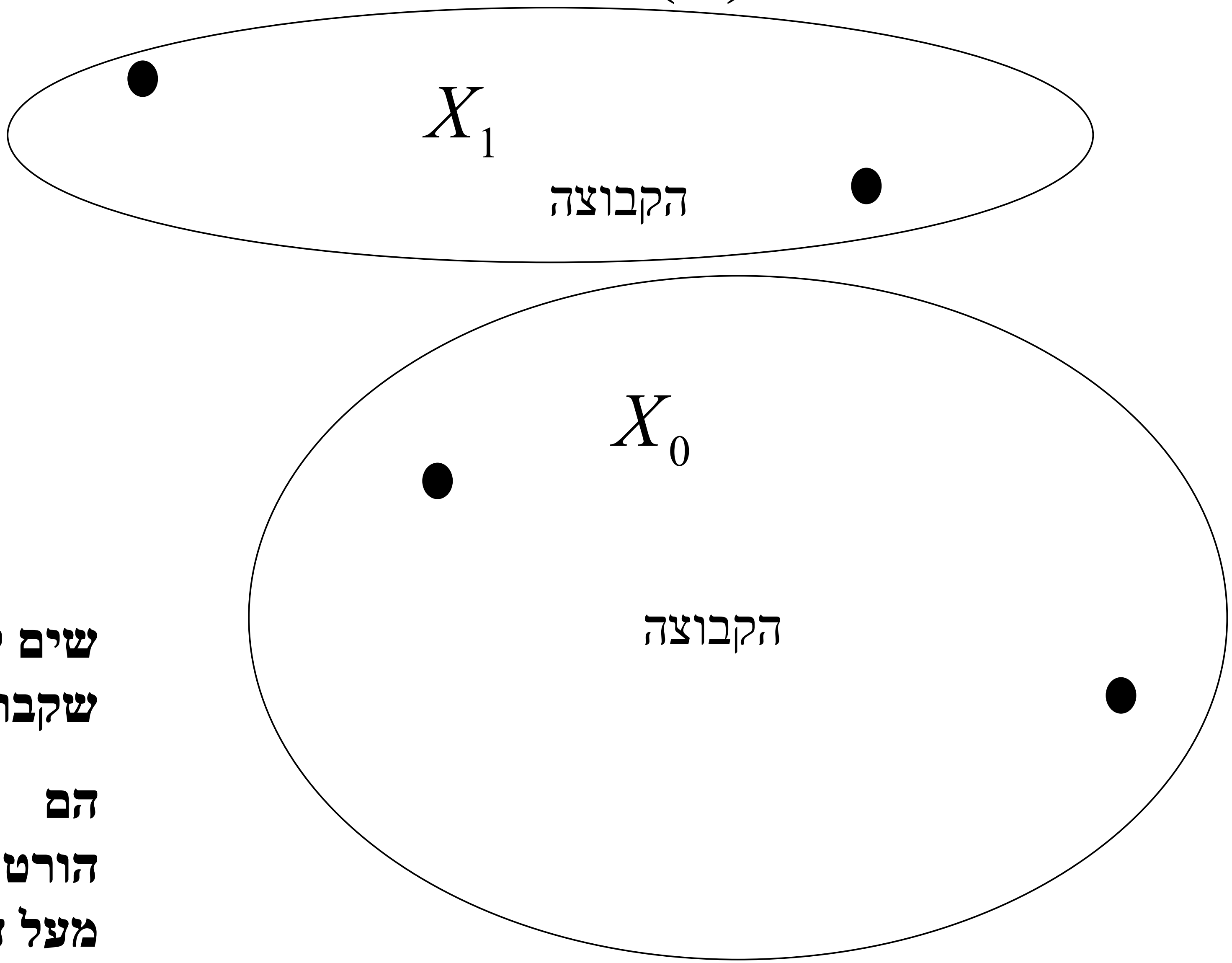
    או
  - X_0 ו X_1 קבוצות הורטון, ו X_1 מעל X_0 או ש X_0 מעל X_1

דוגמא(1) קבוצות הורטון



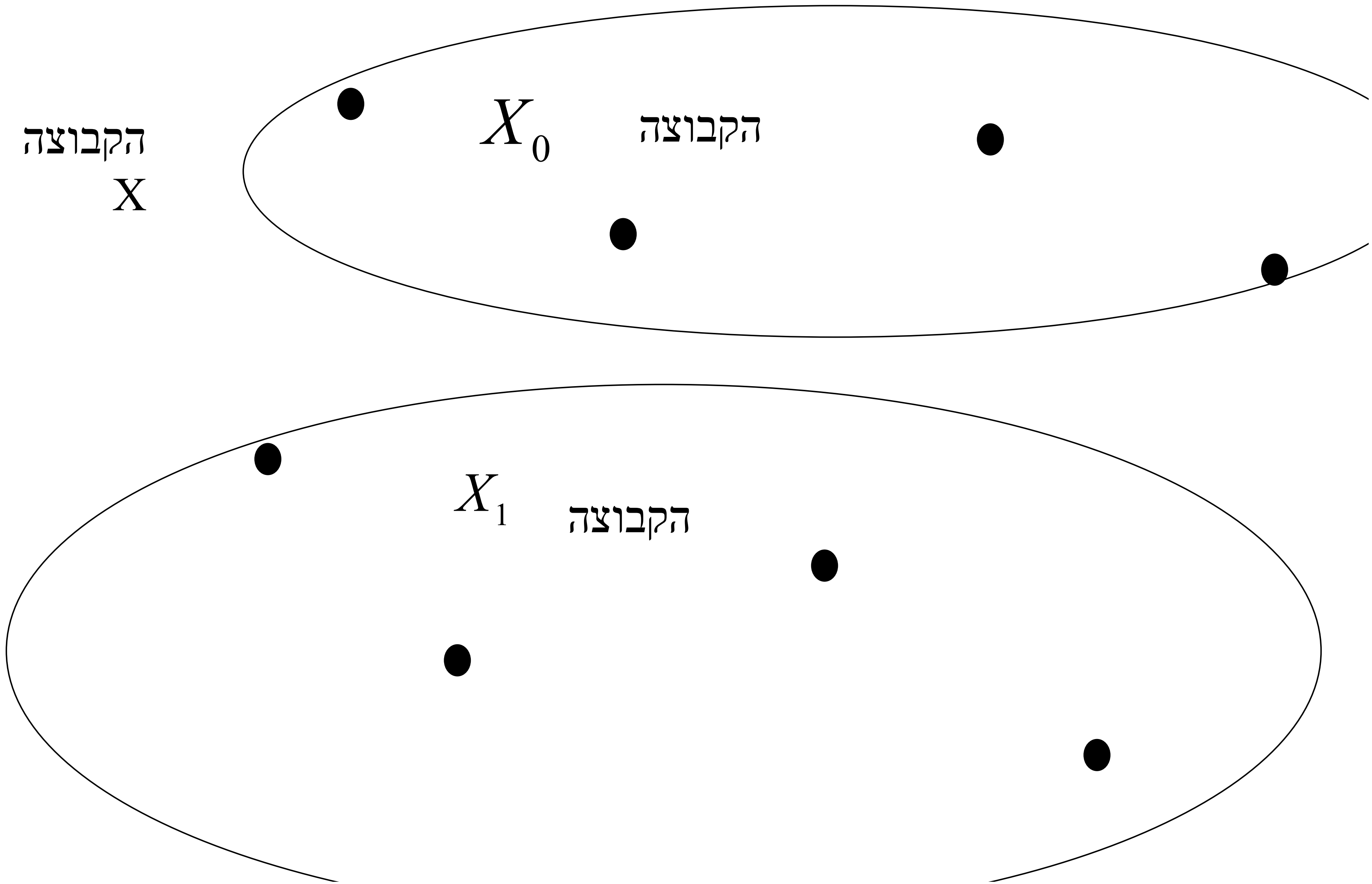
דוגמא(2) קבוצות הורטון

הקבוצה
X

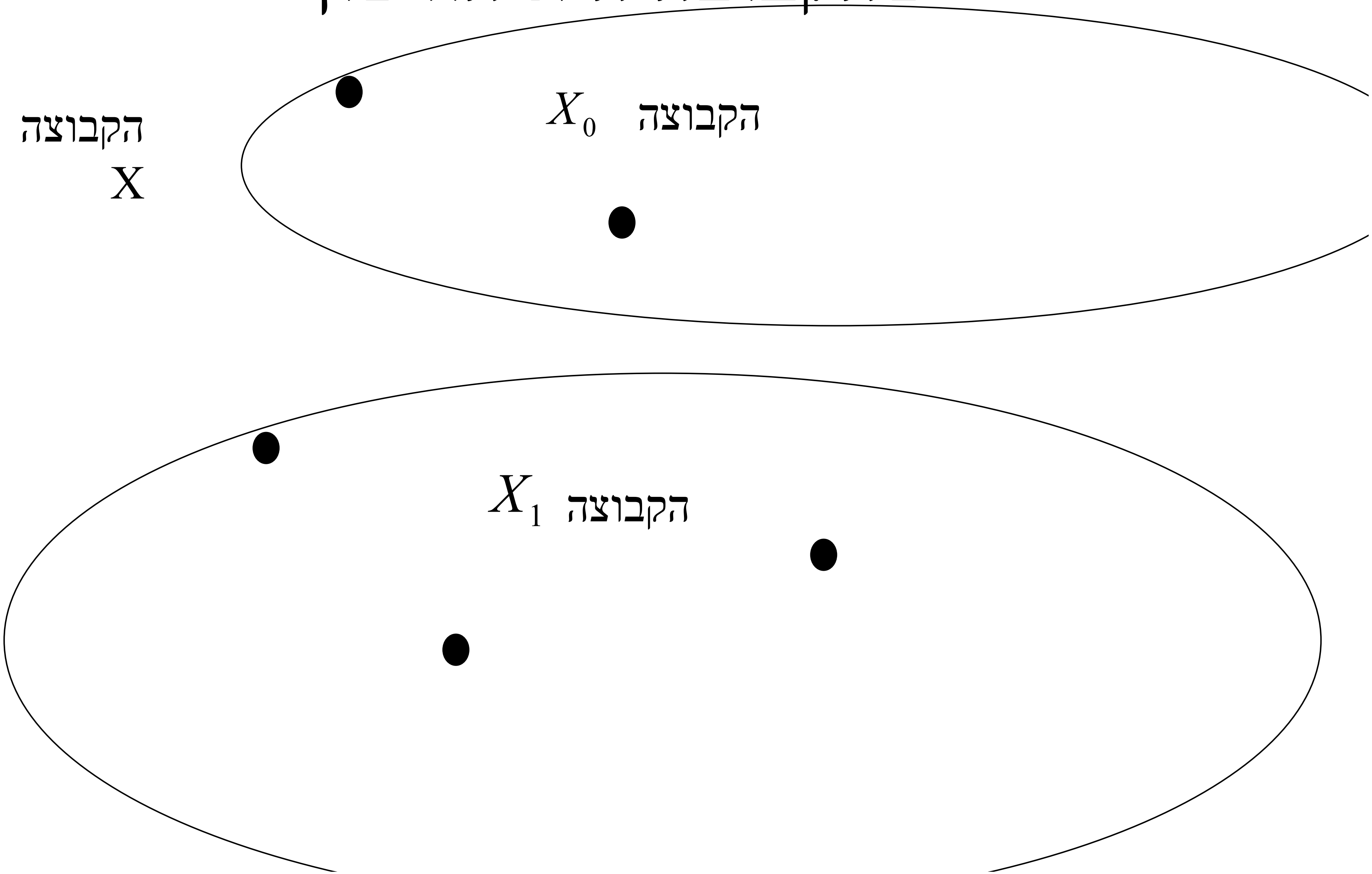


שים לב
שקבוצות ה X_i
הם
הורטון,ואחד
מעל השני

דוגמא(3) לקבוצת הורטון



מחיקת נקודות מימין תשאיר את התכונה שהקבוצה היא הורטון



קיום קבוצות הורטון מכל עוצמה

משפט

לכל **n** טבעי יש קבוצת הורטון מגודל **n**

הוכחה

מספיק להוכיח את הטענה עבור $n = 2^k$,שכן, נוכל למחוק נקודות מימין ועדיין הקבוצה שנקבל תהיה קבוצת הורטון (פורמלית, ניתן להוכיח תכונה זאת באינדוקציה על מבנה קבוצת הורטון)

נדרוש גם שקורדינטות הX של הנקודות בקבוצת הורטון בגודל 2^k הנן $0,1,2,3,\ldots,2^k - 1$

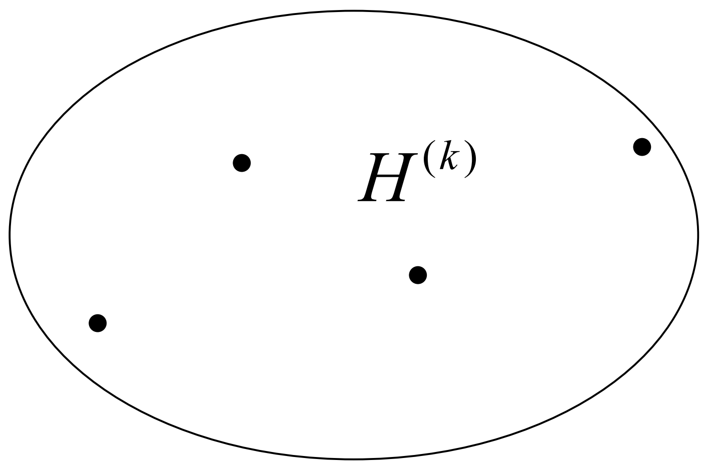
הבניה (מ k=2 ל k=3)

נניח שהקבוצה $H^{(k)}$

קבוצת הורטון בגודל 2^k

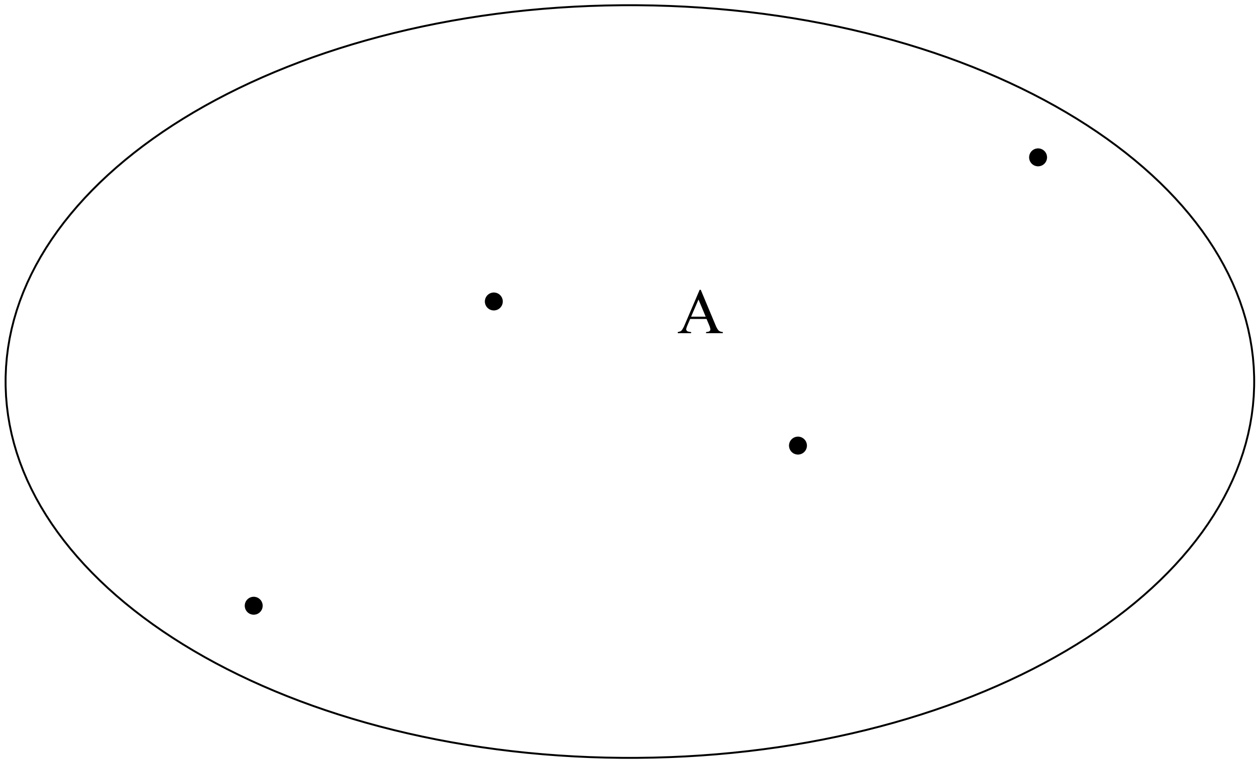
ועם קורדינטות הX

$$0,1,2,3,....,2^k-1$$



הבניה

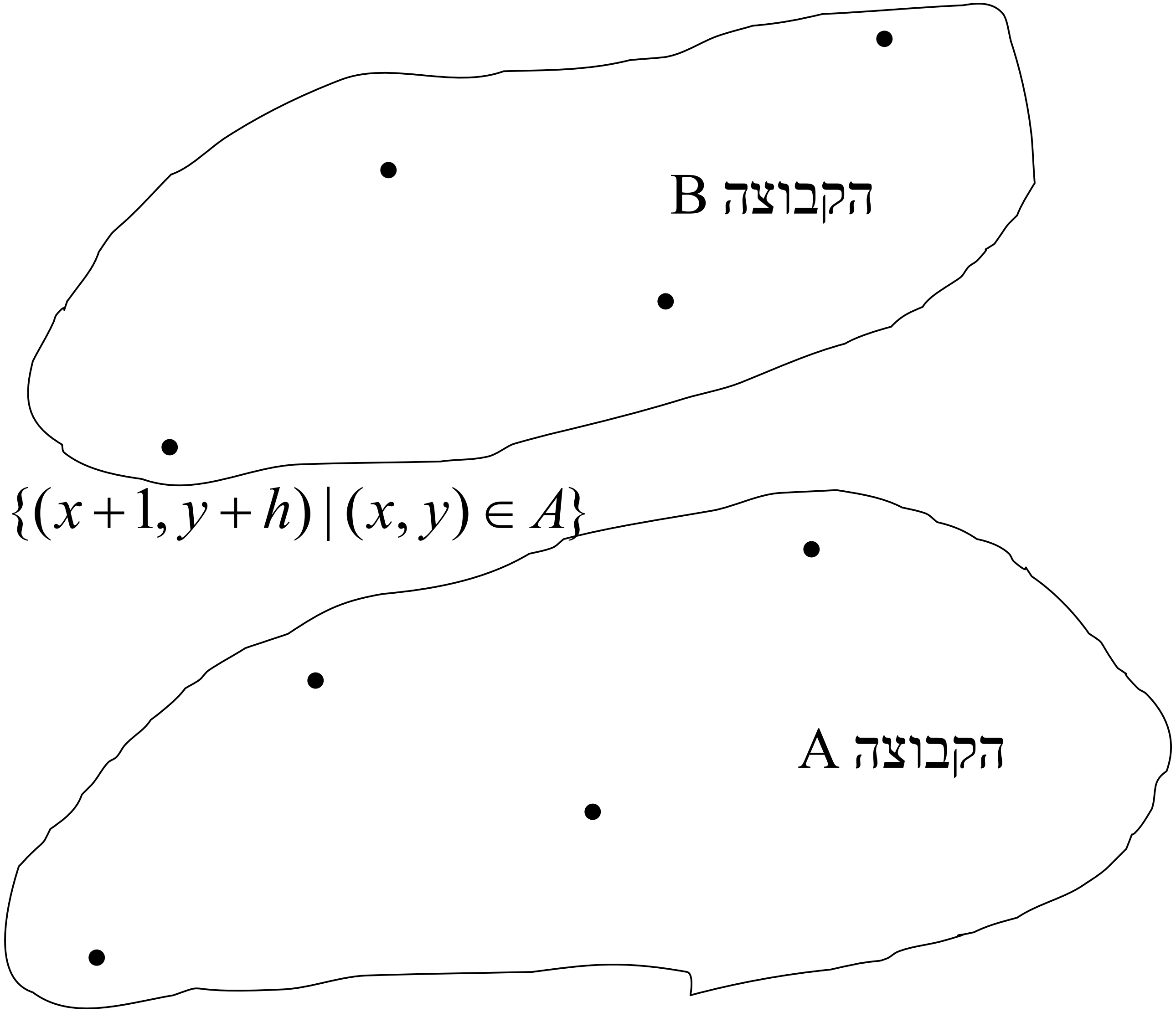
נגדיר $A = 2H^{(k)} = \{(2x, 2y) \mid (x, y) \in H^{(k)}\}$



הבניה

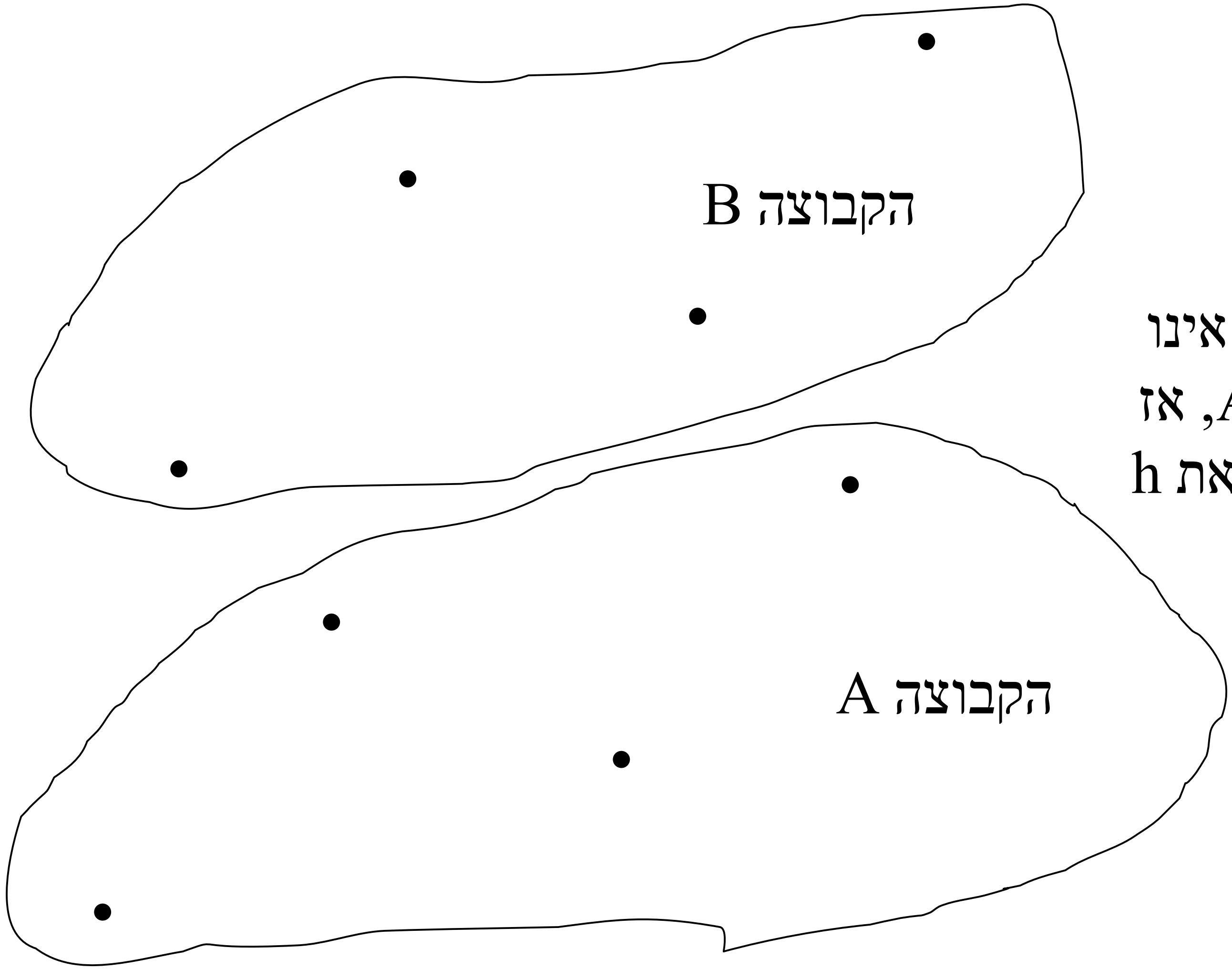
נגדיר את
הקבוצה B
להיות

$$B = A + (1, h) = \{(x+1, y+h) \mid (x, y) \in A\}$$



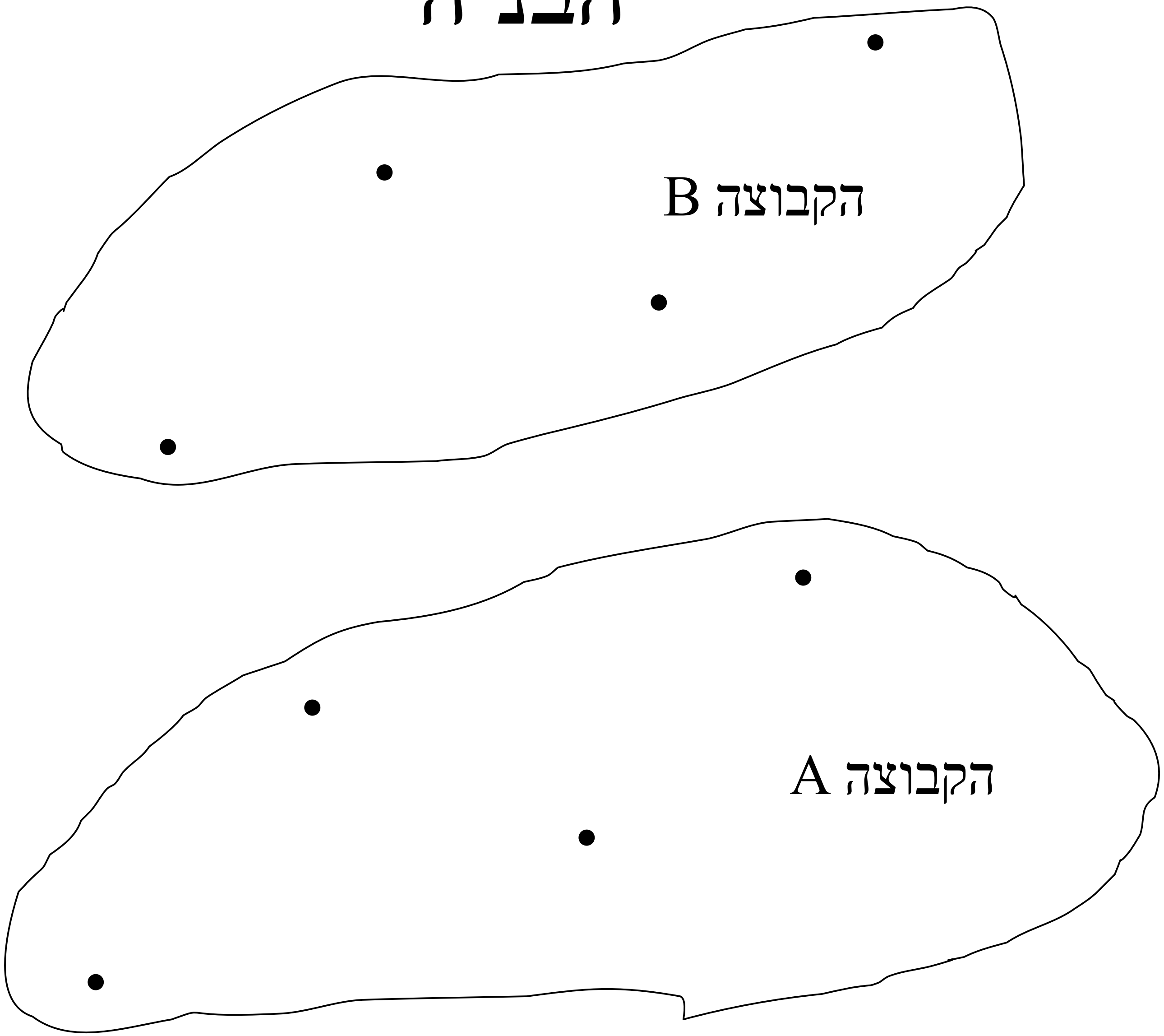
שימו לב שA ו
B קבוצות
הורטון

הבניה



אם B אינו
מעל A, אז
נגדיל את h

הבניה



קיום קבוצות הורטון מכל עוצמה

ברור שהקבוצה $H = A \cup B$ היא קבוצת הורטון
כאשר $H_0 = B$ ו $H_1 = A$. הגודל של H יהיה 2^{k+1}
כמו כן קואורדינטות הX של הנקודות בקבוצת הורטון
יהיו $0,1,2,3,\ldots,2^{k+1}-1$ כנדרש.

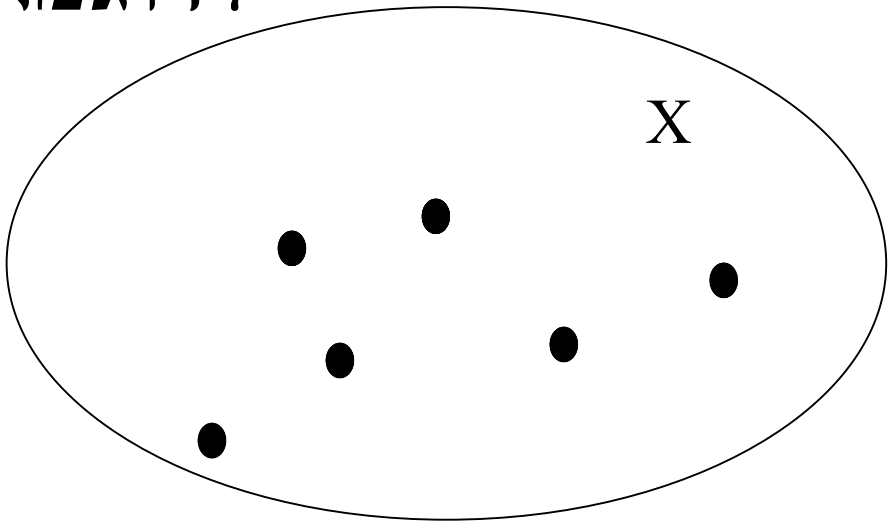
קבוצה r-סגורה מלמעלה

<u>הגדרה</u>

- נאמר כי X היא r-סגורה מלמעלה אם לכל ספל בגודל r יש נקודה בX שנמצאת מעל הספל
- נאמר כי X היא r-סגורה מלטה אם לכל כובע בגודל r יש נקודה בX שנמצאת מתחת לכובע

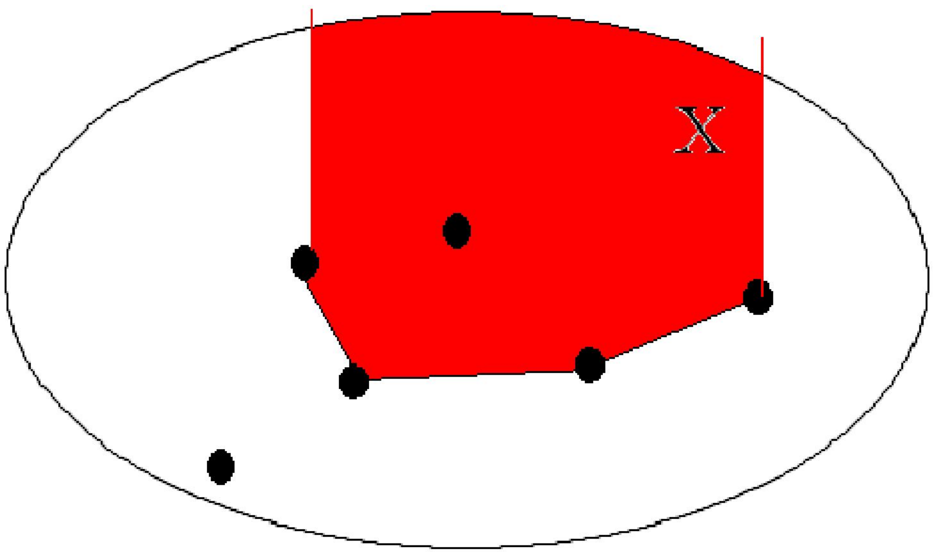
לדוגמא

X סגורה מלמעלה-4



לדוגמא

X 4-סגורה מלמעלה



קבוצת הורטון H היא 4-סגורה

<u>משפט</u>

כל קבוצת הורטון H היא 4-סגורה מלטה ו4-סגורה מלמעלה.

<u>הוכחה(נוכיח שהיא 4-סגורה למעלה)</u>

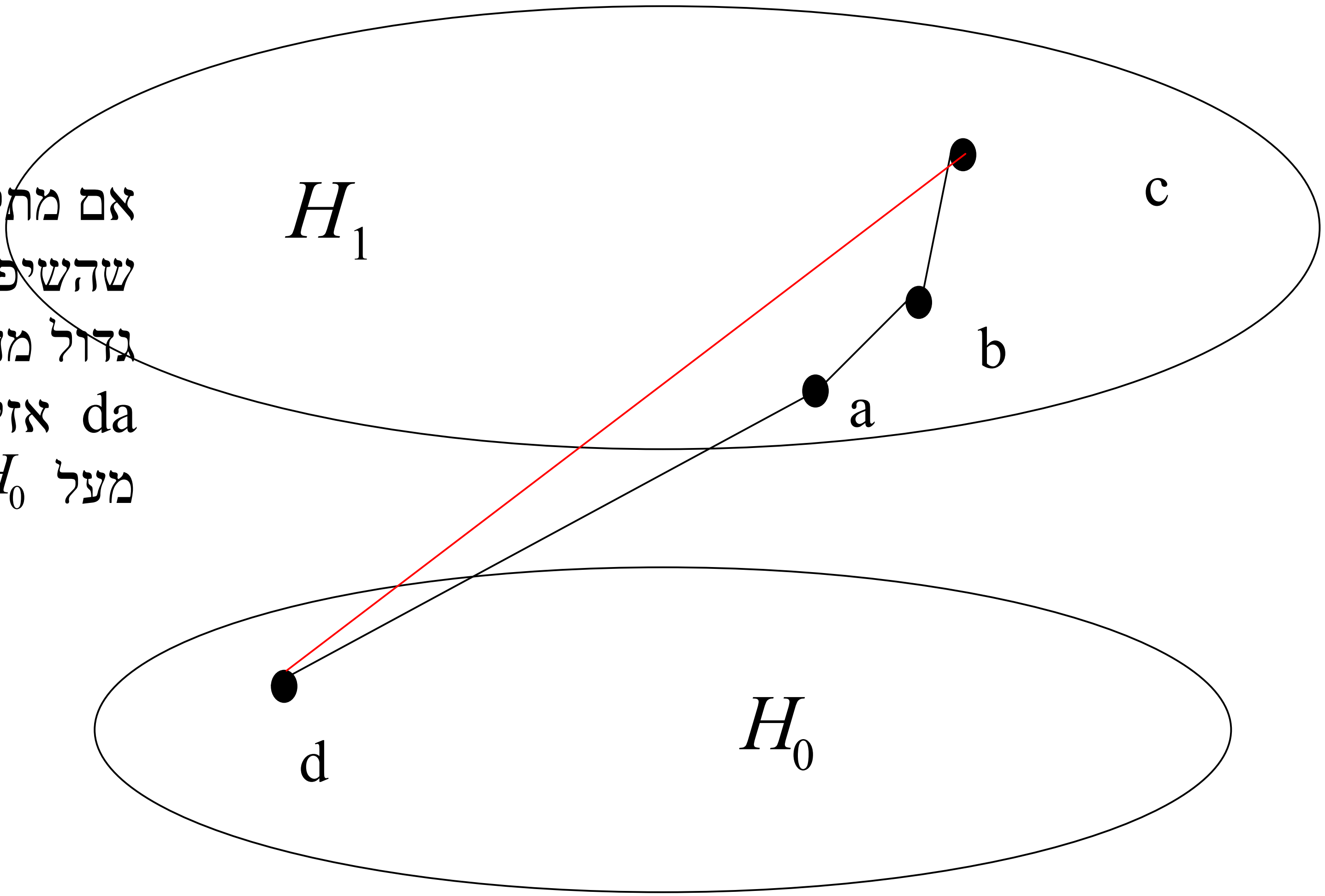
נוכיח זה באינדוקציה על מבנה של קבוצת ההורטון:

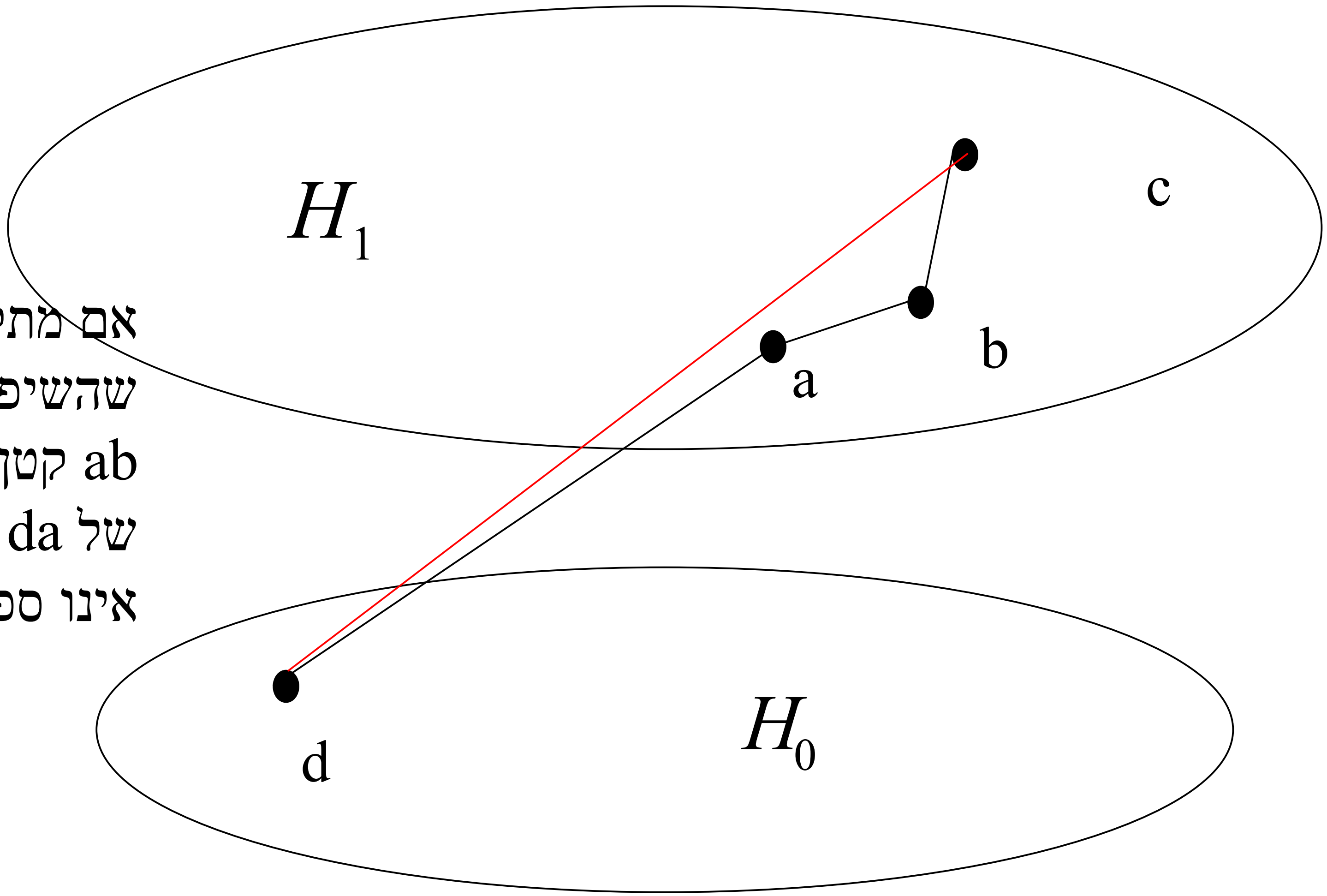
- אם H נקודה בודדת או הקבוצה הריקה - הטענה מתקיימת באופן ריק
- יהא C ספל בגודל 4 בH

קבוצת הורטון H היא 4-סגורה

- אם הספל מוכל ב H_1 או ב H_0 אזי לפי הנחת האינדוקציה תהיה נקודה בH שתהיה מעל C.לכן נניח כי $H_0 \cap C \neq \varnothing \neq H_1 \cap C$
- נניח בלי הנחת הכלליות שH_1 מעל H_0. נראה כי אין 3 נקודות שנמצאות בC ובH_1:
- נניח בשלילה שיש נקודות a,b,c שנמצאות ב H_1 ונקודה d שנמצאת ב H_0

אם מתקיים
שהשיפוע של ab
גדול מהשיפוע של
da אזי H_1 אינו
מעל H_0

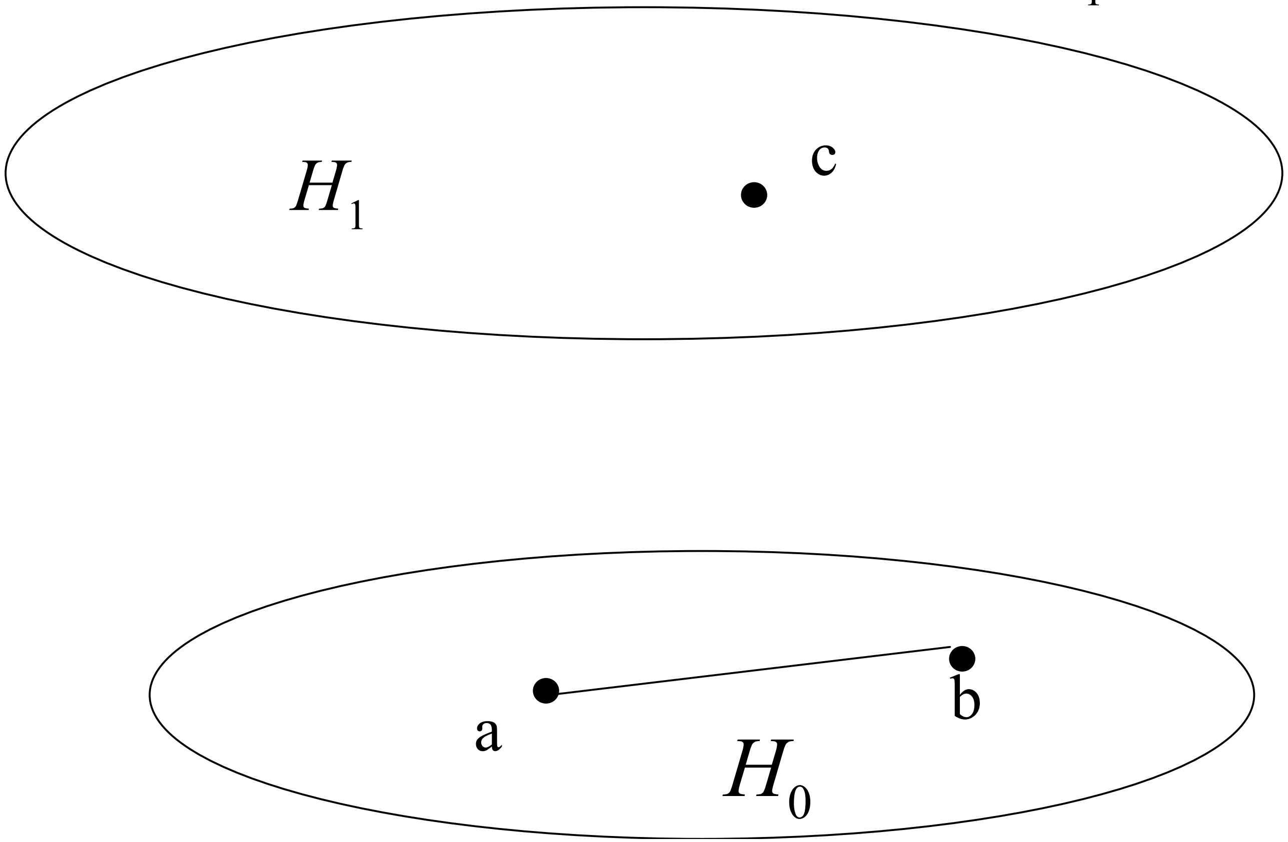




אם מתקיים
שהשיפוע של של
ab קטן מהשיפוע
של da אזי dabc
אינו ספל

קבוצת הורטון H היא 4-סגורה

- לכן,יש שני נקודות, a וb שנמצאים בH_0 ובC.
- לפי ההגדרה של קבוצות הורטון יש נקודה c שנמצאת בH_1 והיא בין a וb



קבוצת הורטון H היא 4-סגורה

- לכן, בפרט, הנקודה c מופיעה מעל הספל C.
  מ.ש.ל

קבוצת הורטון H לא מכילה חור בגודל 7

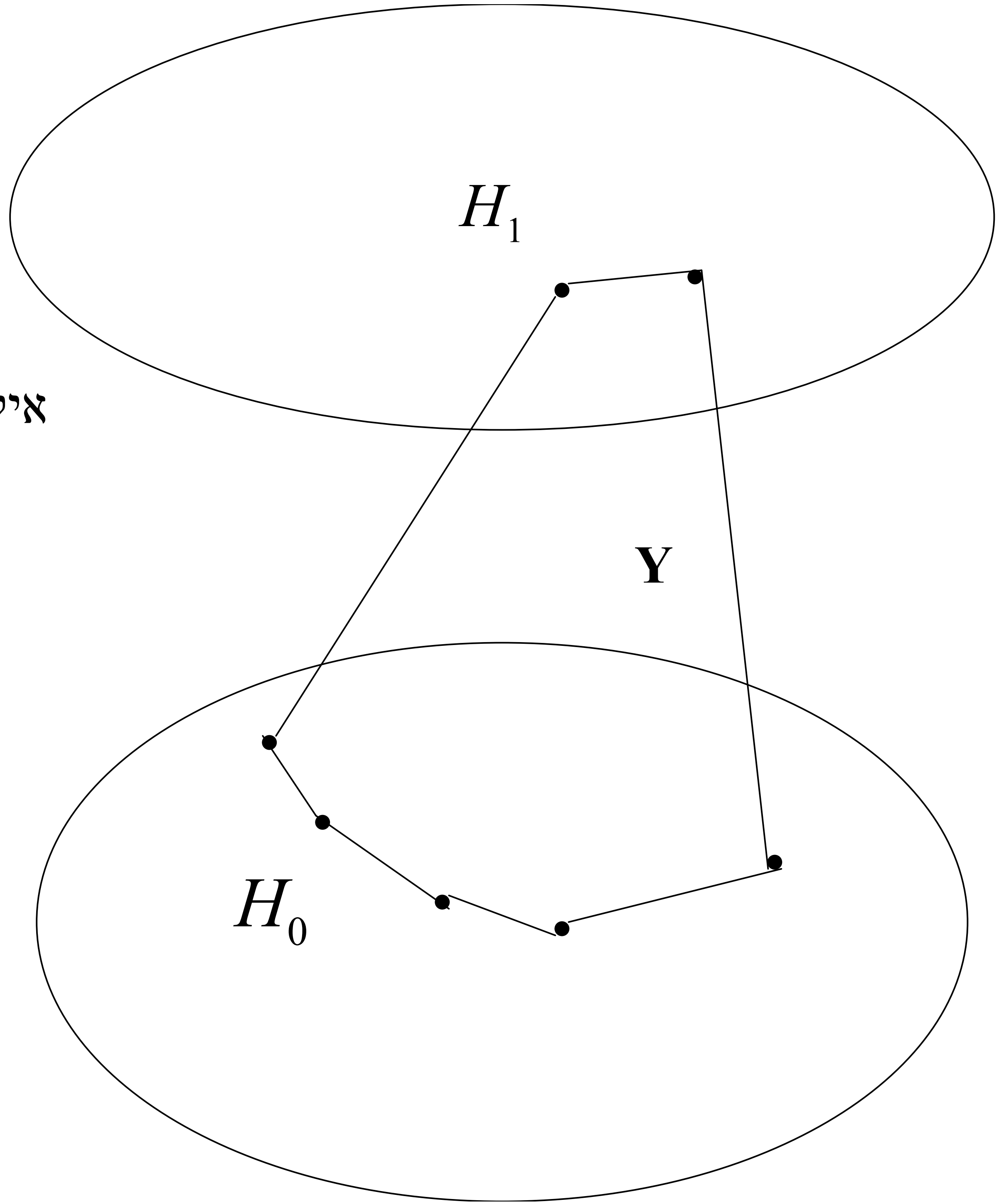
משפט

אף קבוצת הורטון H לא מכילה חור בגודל 7

הוכחה

- נוכיח באינדוקציה על מבנה של קבוצות ההורטון
- נניח בשלילה שיש קבוצת הורטון H שמכילה חור בגודל 7.
- לפי הנחת האינדוקציה, החור לא מוכל בH_0 ובH_1
- נניח בלי הנחת הכלליות ש H_1 מעל H_0

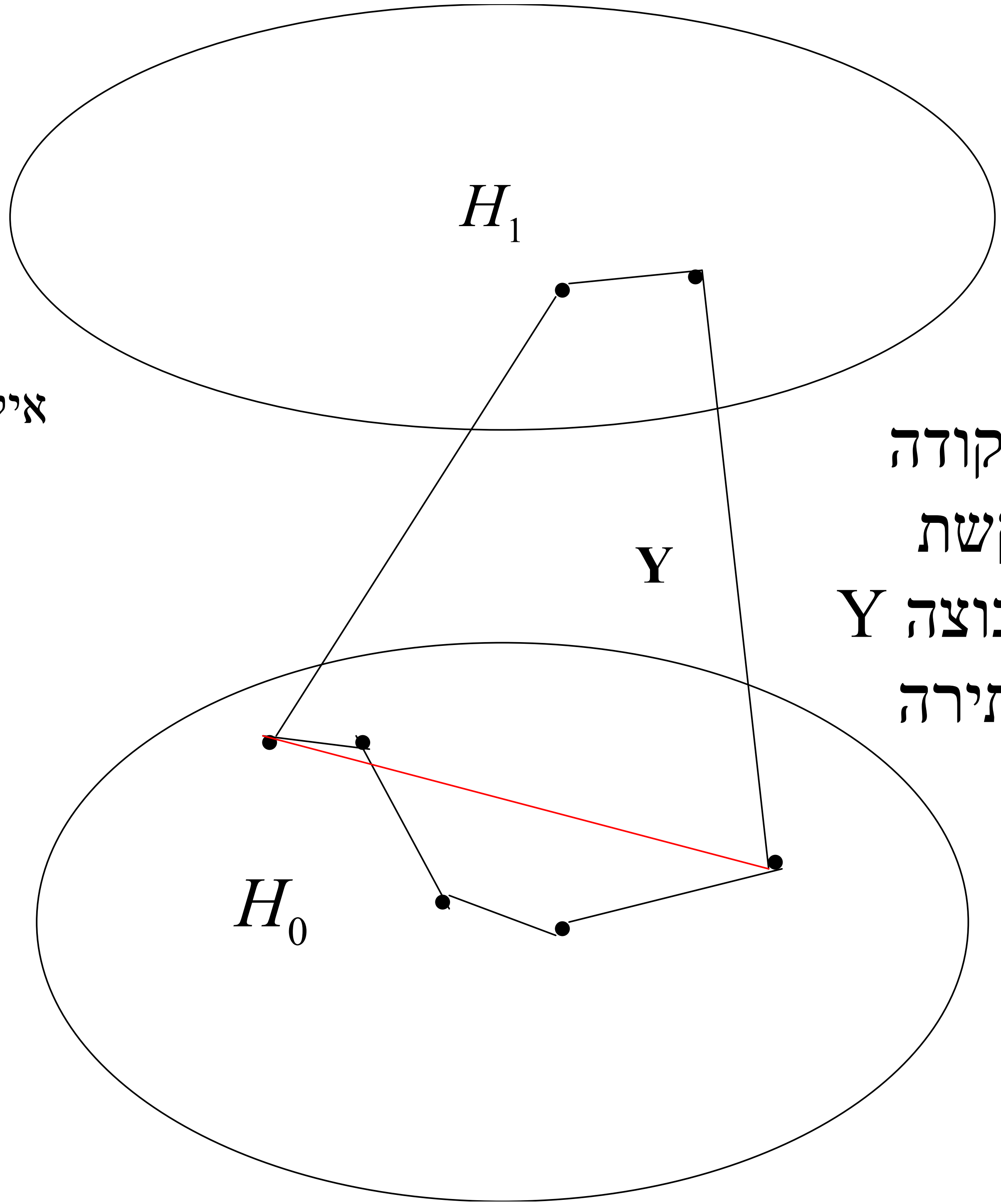
אילוסטרציה



קבוצת הורטון H לא מכילה חור בגודל 7

- מעקרון שובך היונים,יש קבוצה H_i כך ש $|H_i \cap Y| \geq 4$
- נניח בלי הנחת הכלליות שזה הקבוצה H_0
- משום שY ב"ת גם $H_0 \cap Y$ ב"ת
- נוכיח ש$H_0 \cap Y$ הוא ספל

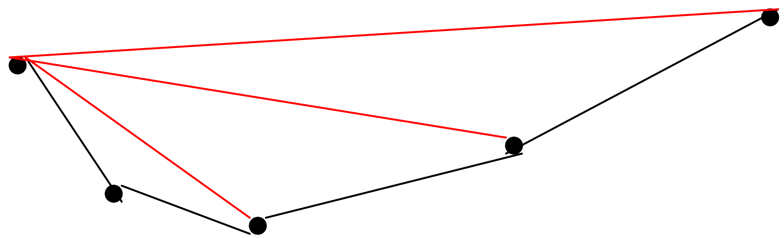
אילוסטרציה



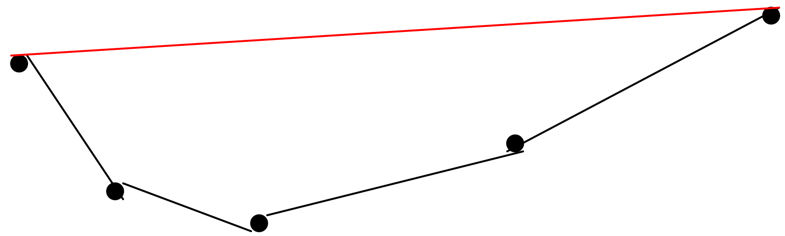
• אם קיימת נקודה אחת מעל הקשת החוסמת הקבוצה Y אינה ב"ת-סתירה

קבוצת הורטון H לא מכילה חור בגודל 7

- לכן מתקיים ש $H_0 \cap Y$ הוא ספל בגודל ≤ 4
- מתקיים שלכל ספל(או כובע) בגודל r ישנו תת-ספל שהוא בגודל $k \leq r$ ע"י מחיקת $r-k$ נקודות מימין

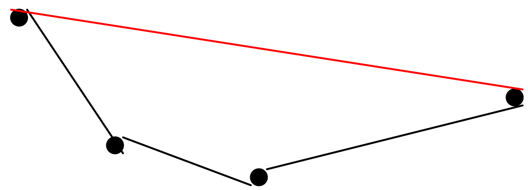


דוגמא



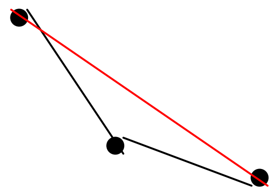
r=5 k=5

דוגמא



k=4

דוגמא

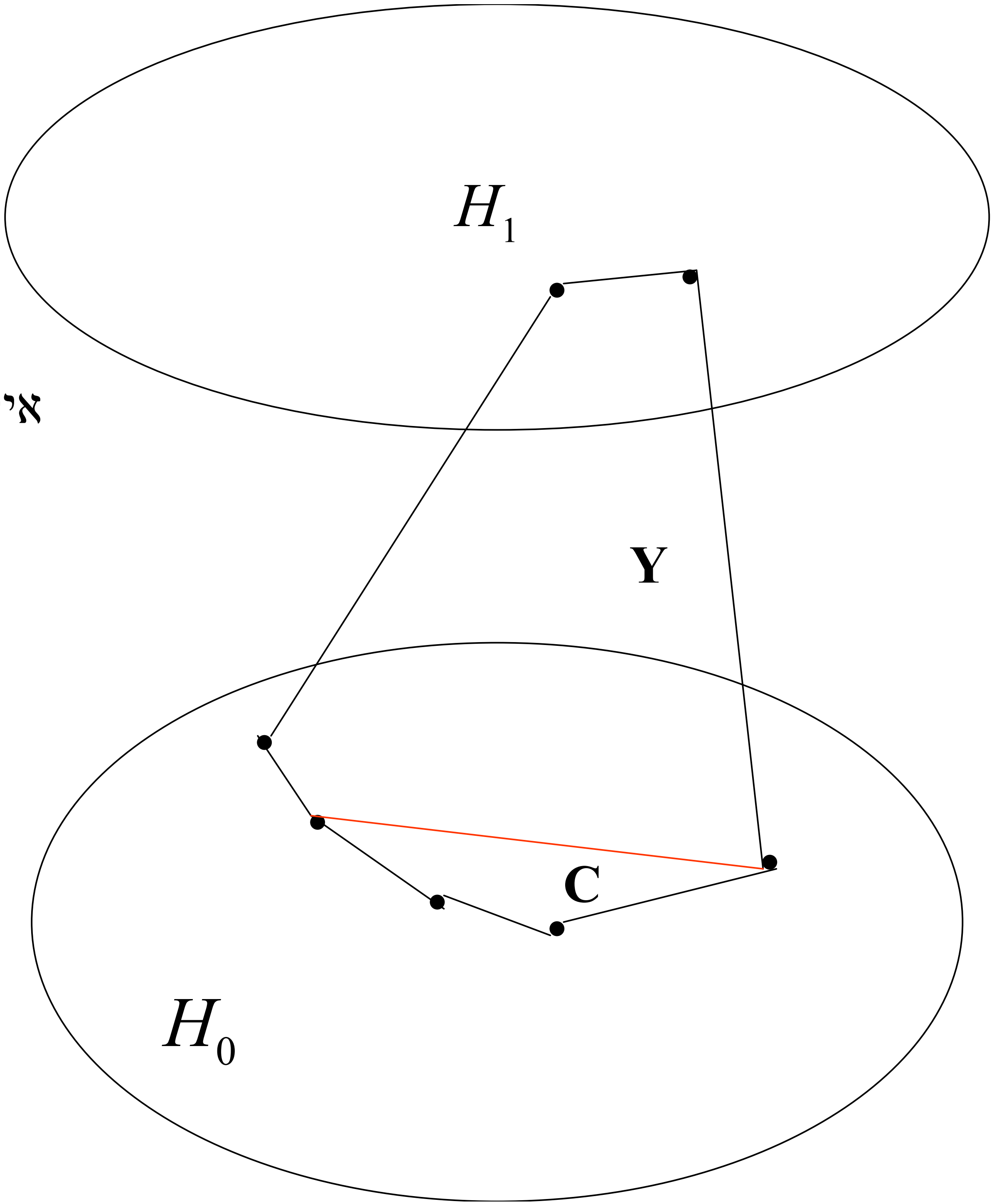


k=3

קבוצת הורטון H לא מכילה חור בגודל 7

- לכן, בסה"כ יש ספל $Y \subseteq C$ בגודל 4 שנמצא ב H_0

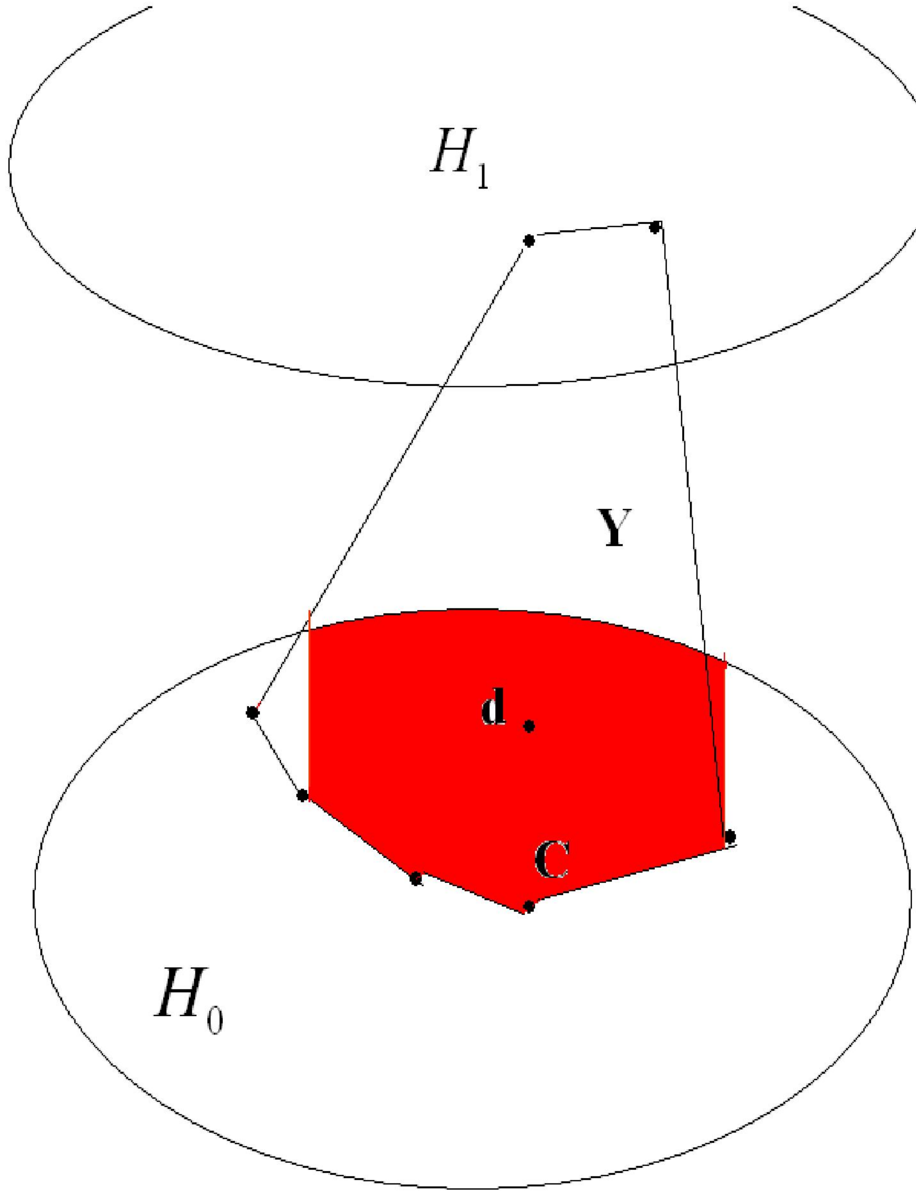
אילוסטרציה



קבוצת הורטון H לא מכילה חור בגודל 7

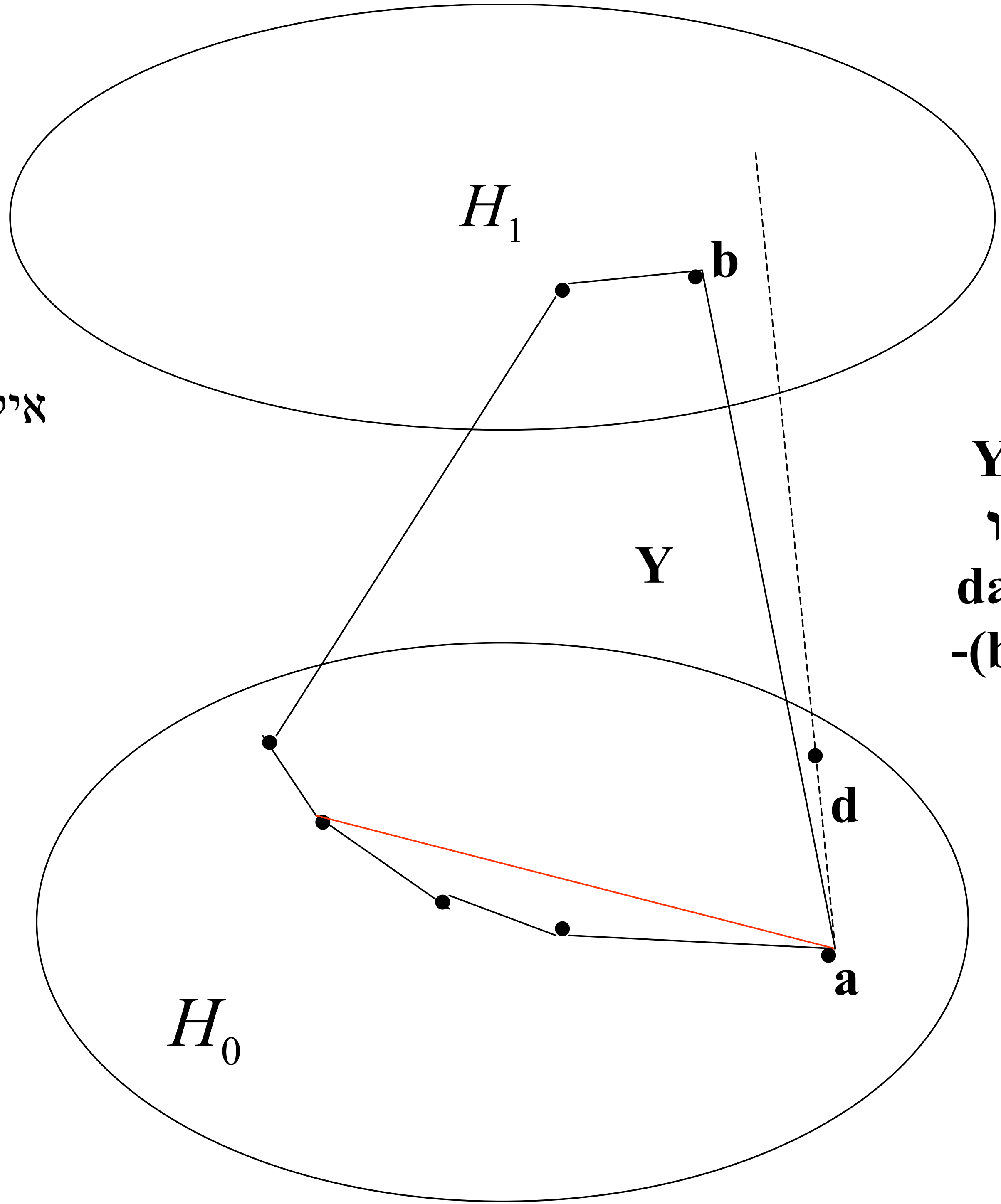
- משום ש H_0 קבוצת הורטון, היא 4-סגורה מלמעלה ולכן יש נקודה ב H_0 שנמצאת מעל C נסמן אותה באות d

אילוסטרציה



אם d בתוך Y
אזי Y אינה
חור(יש לה נקודה
פנימית)

אילוסטרציה



אם d מחוץ לY
אזי H_1 אינו
מעל H_0 -(da
מעל הנקודה b)-
סתירה

הערות

- ניתן להוכיח שיש קבוע n כך שכל קבוצה במצב כללי,בגודל n ,מכיל חור בגודל 6

נספחים

חסם תחתון על f(k,l)

החסם על f(k,l) הוא הדוק, כלומר יש קבוצה בגודל $\binom{k+l-4}{k-2}$ כך שאין לו ספל בגודל k וכובע בגודל l

הוכחה

נבנה זאת באינדוקציה על k ו-l.

k=2 או l=2-ניקח את הנקודה הבודדת

חסם תחתון על f(k,l) (המשך)

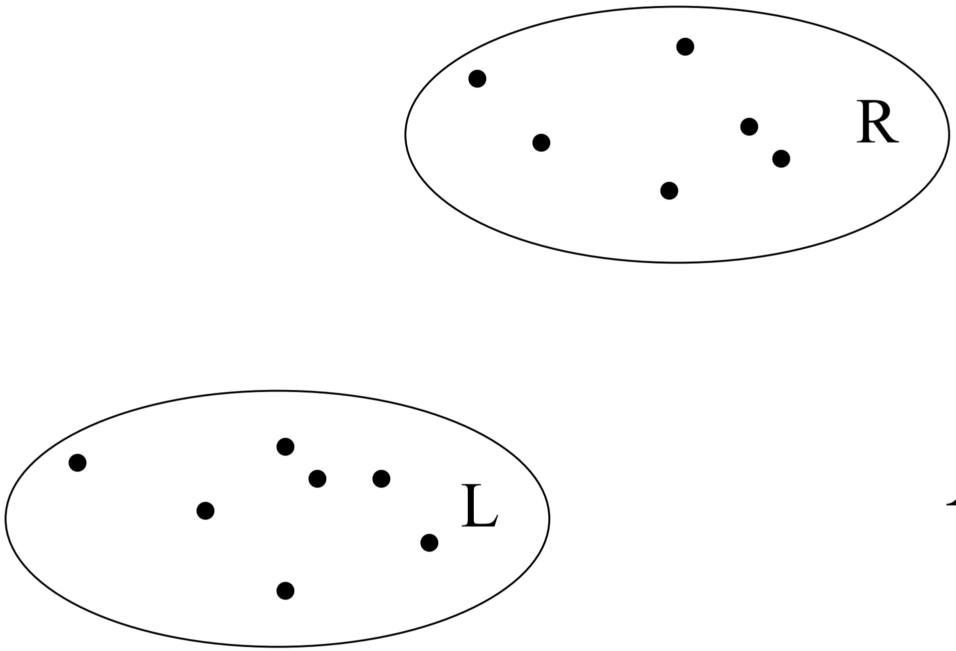
<u>הוכחה(המשך)</u>

נגדיר קבוצה $X_{k,l}$ להיות קבוצה בעל $\binom{k+l-4}{k-2}$ איברים כך שאין לו ספל בגודל k וכובע בגודל l

נניח שבנינו את $X_{k,l-1}$ ואת $X_{k-1,l}$

נבנה את $X_{k,l}$

חסם תחתון על f(k,l) (המשך)



<u>הוכחה(המשך)</u>

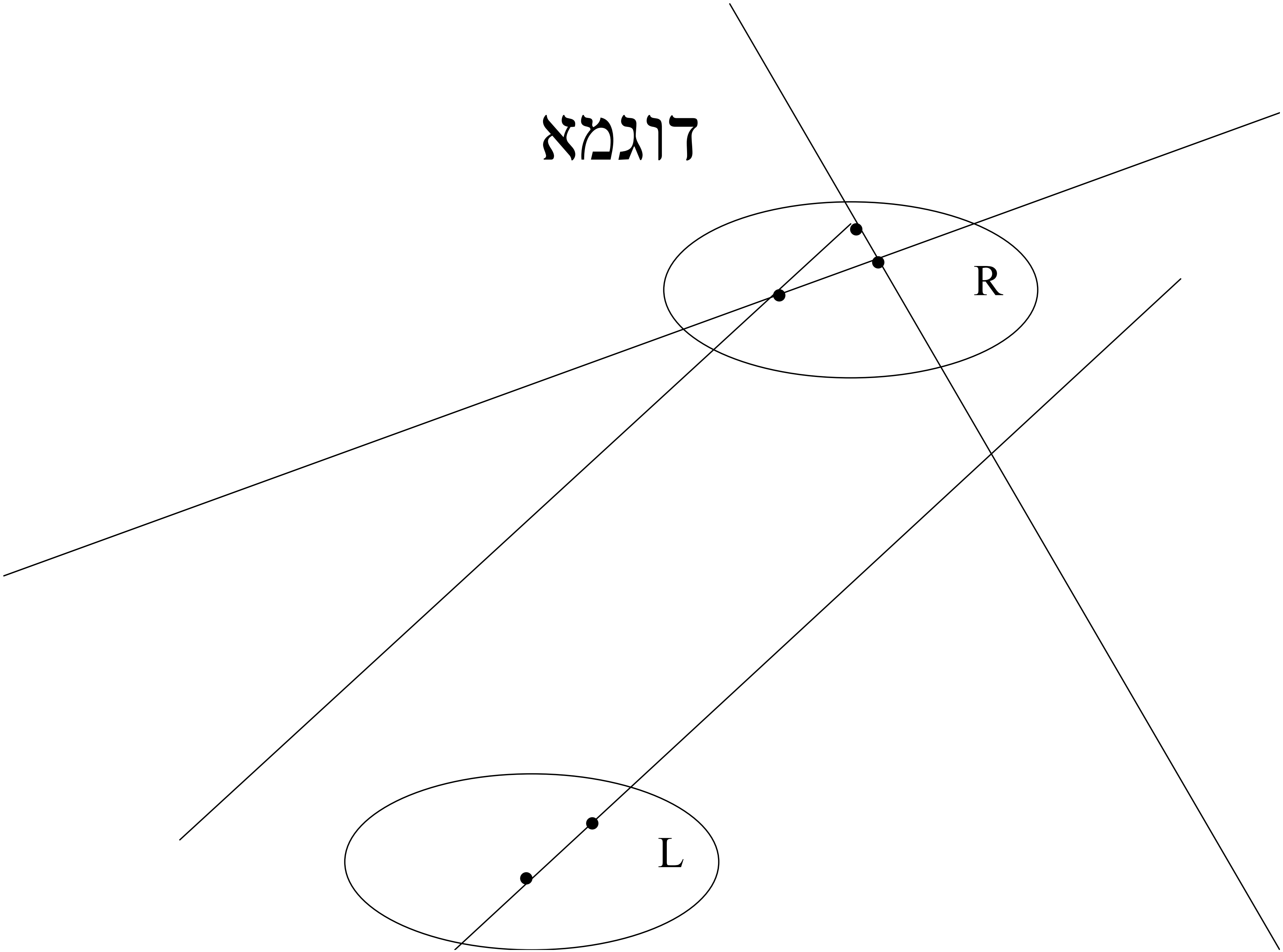
הבניה תהיה כך:

כאשר R היא הקבוצה $X_{k,l-1}$

וL היא הקבוצה $X_{k-1,l}$

R מימין לL וR מעל L

דוגמא



חסם תחתון על f(k,l) (המשך)

<u>הוכחה (המשך)</u>

הקבוצה היא בגודל $\binom{k+l-4}{k-2} = \binom{k+l-5}{k-3} + \binom{k+l-5}{k-2}$

ולכן יש להוכיח בסה"כ שהקבוצה שבנינו לא מכילה ספל בגודל k וכובע בגודל l.

נוכיח שהיא לא מכילה ספל בגודל k. הוכחה דומה שהיא לא מכילה כובע בגודל l

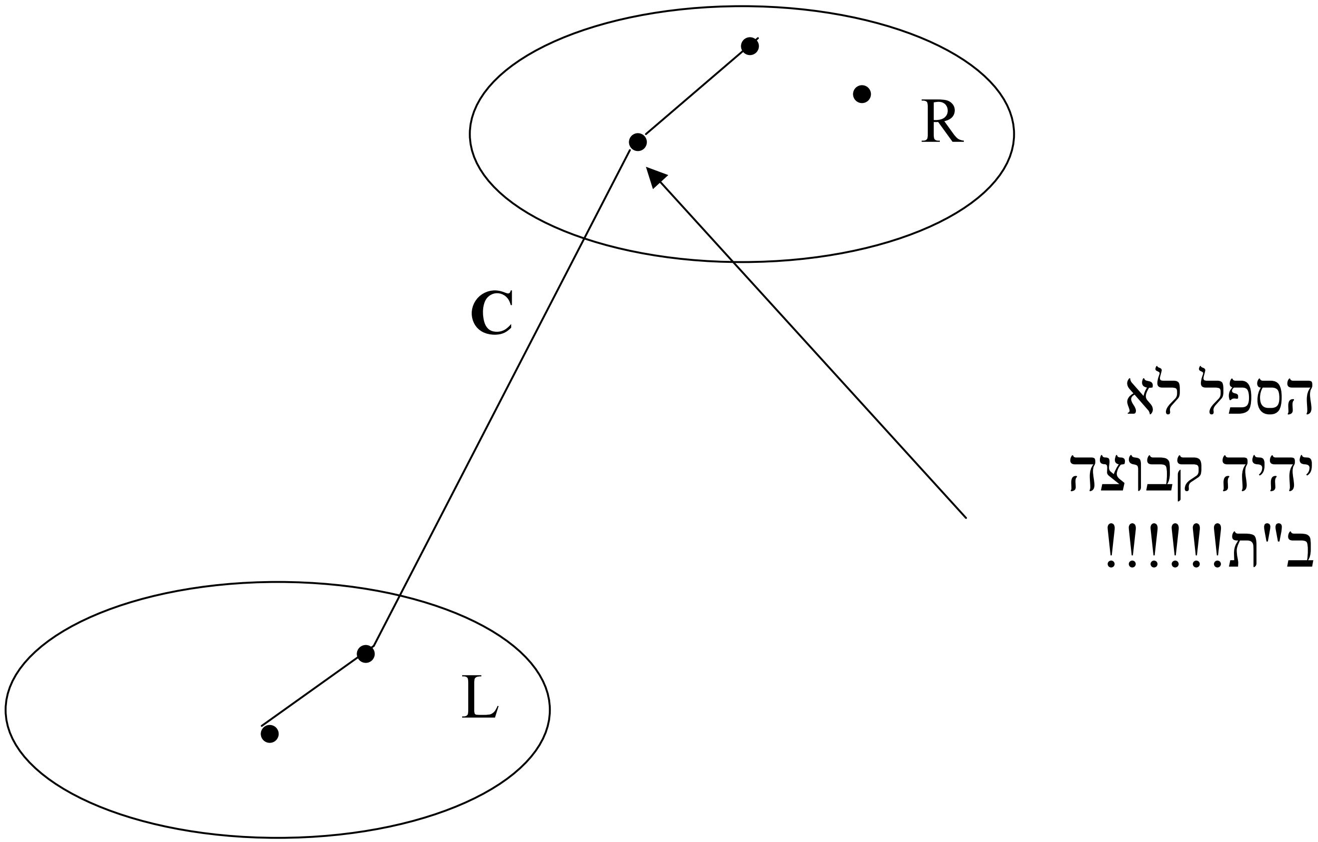
חסם תחתון על f(k,l) (המשך)

<u>הוכחה(המשך)</u>

יהא C ספל בקבוצה שבנינו.

- אם $C \cap L = \emptyset$ אזי C מוכל בR ולכן הוא בגודל $\geq k-1$
- אם $C \cap L \neq \emptyset$ ואם לכל היותר נקודה אחד בR ובC אזי גודל הספל יהיה $\geq k-2+1 = k-1$ (k-2 נקודות לכל היותר בL ועוד נקודה אחת לכל היותר בR)
- נוכיח שלא יתכן ש $C \cap L \neq \emptyset$ ו $|R \cap C| \geq 2$

חסם תחתון על f(k,l) (המשך)



מסקנה

$$f(k,l)=\binom{k+l-4}{k-2}+1$$

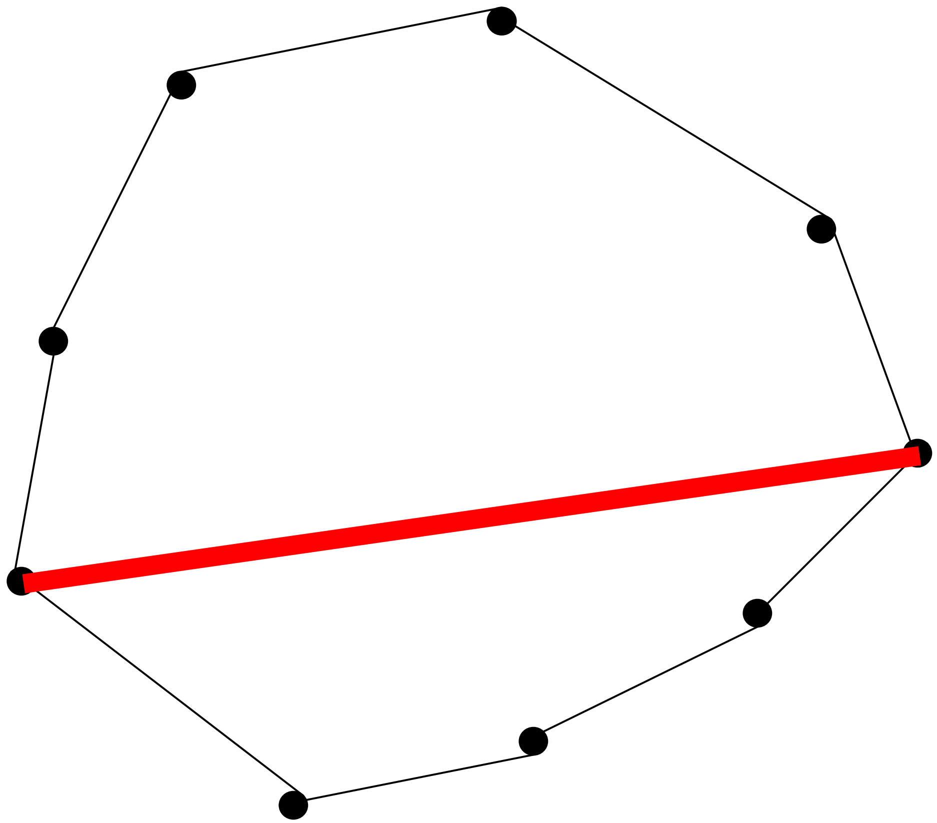
חסם תחתון ל n(k)

- לכל k טבעי, מתקיים ש $f(\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil) \leq n(k)$

הוכחה

תהא קבוצה X בגודל n(k). אזי יש קבוצה $Y \subseteq X$ ב"ת בגודל k. נעביר אלכסון בין שני הנקודות הכי רחוקות (ביחס לציר הx), כך שנקבל חלוקה של Y לספל וכובע

דוגמא



באדום -
הישר

חסם תחתון ל n(k) (המשך)

- לכן, יש בY (ולכן בX) ספל או כובע בגודל של לפחות $\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$ (נובע מעקרון שובך היונים)

מסקנה

- מתקיים כי

$$n(k) \ge f(\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor) \ge \binom{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor - 4}{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor - 2}$$

- לפי נוסחת סטירלינג, נקבל כי ל k מספיק גדול

$$n(k) \ge 2^k$$

- לכן,לכל n טבעי, יש קבוצה X בגודל n, כך שכל תתי-קבוצות בגודל $\log_2 n$ אינן ב"ת

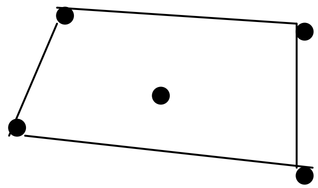
לכל קבוצה בעל 5 נקודות במצב כללי יש תת קבוצה ב"ת בגודל 4

- **הוכחה:**

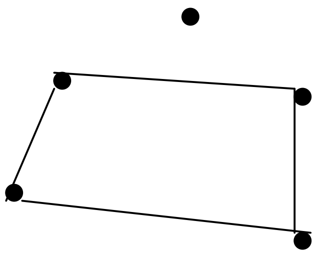
1. אם כמות נקודות השפה שווה ל 4 - ניקח את כל נקודות השפה
2. אם כמות נקודות השפה שווה ל5- אזי X ב"ת ולכן אם ניקח תת-קבוצה כל שהיא בגודל 4 – נסיים (מהטענה הראשונה שהוכחנו, נובע שתת-הקבוצה הזאת היא ב"ת)
3. אם כמות נקודות השפה שווה ל 1-סימן ש X מכילה נקודה אחת - סתירה
4. אם כמות נקודות השפה שווה ל 2 - סימן שכל הנקודות נמצאות על ישר אחד - סתירה לכך שהנקודות נמצאים במצב כללי

אילוסטרציה

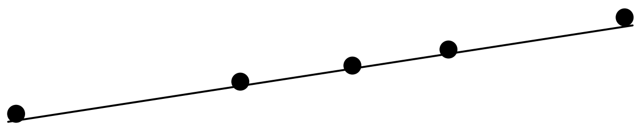
1. במקרה של 4 נקודות:



2. במקרה של 5 נקודות:



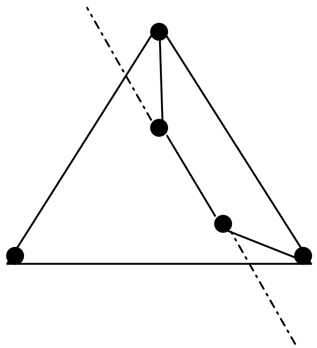
3. במקרה של 2:



כמה טענות בסיסיות על קבוצות ב"ת בקמירות

<u>הוכחה(המשך):</u>

- אם כמות נקודות השפה שווה ל 3: נקבל משולש עם 2 נקודות פנימיות. ניקח תת-קבוצה שתכיל את הנקודות הפנימיות עם עוד 2 נקודות שפה כך שהצלע שהם יוצרים,לא תחתוך את הישר שנוצר ע"י 2 הנקודות הפנימיות . ברור שהקבוצה הזאת ב"ת



משפט Erdos-Szekeres(הוכחה מספר 2)

- **הוכחה** : נשתמש בטענות הבאות, ללא הוכחה:

1. **משפט רמזי(מקרה פרטי):**
לכל r,k יש n כך שלכל קבוצה X בגודל n, ולכל
פונקציה c:E->{red,blue} , כאשר E קבוצת
כל תתי הקבוצות של X בגודל r, יש תת-קבוצה
Y בגודל k, כך שכל תתי-הקבוצות של Y
בגודל r צבועים באותו צבע

משפט Erdos-Szekeres

2. **<u>משפט Caratheodory:</u>** כל נקודה בconv(X) היא קומבינציה קמורה של לכל היותר 3 נקודות בX

- **<u>נוכיח מסקנה ממשפט Caratheodory:</u>**

אם Y קבוצה בגודל $\geq$ 4, והיא אינה ב"ת, אז יש לה תת-קבוצה בגודל 4 שאינה ב"ת

<u>הוכחה:</u> ניקח נקודה פנימית $y \in Y$.

אזי $y \in conv(Y \setminus \{y\})$ ולכן y היא קומבינציה קמורה של עד 3 נקודות מ{Y\{y.

משפט Erdos-Szekeres

- **<u>מסקנה משפט Caratheodory:</u>** אם Y קבוצה בגודל ≤ 4, והיא אינה ב"ת,אז יש לה תת-קבוצה בגודל 4 שאינה ב"ת.

<u>הוכחה(המשך):</u> כעת, ניקח תת-קבוצה של Y בגודל 4 שמכילה את y ואת הנקודות שפורשות אותה. ברור ש y נקודה פנימית של קבוצה זאת.

משפט Erdos-Szekeres

כעת נעבור להוכחת המשפט

הוכחה: מספיק להוכיח את הטענה עבור $k \geq 5$. נגדיר פונקציה צביעה על כל תתי-הקבוצות מגודל 4,כך שתת-קבוצה תצבע באדום אמ"ם היא מהווה קבוצה ב"ת. לפי משפט רמזי (r=4), קיים n מספיק גדול כך שלכל X בגודל n,יש תת-קבוצה Y בגודל k, כך שכל תתי קבוצות בגודל 4 צבועים באותו צבע.

משפט Erdos-Szekeres

<u>הוכחה(המשך):</u> כעת, משום ש$k \geq 5$ אזי לY יש תת-
קבוצה בגודל 5, ולכן בסה"כ יש לY תת-קבוצה
בת"ל בגודל 4 <== כל תתי-הקבוצות בגודל 4 של
Y צבועים באדום <== Y ב"ת בגודל k.
מ.ש.ל