(100)

נושאים מתקדמים באלגוריתמים - תרגיל 2

① פונקציית מרחק: 0 אם הקיבול השיורי $\geq 3\Delta$, 1 אחרת (עבור הקשתות המיוחדות)
צ"ל: המרחק מ-s ל-t גדל כל איטרציה כמו הבעיה החוסמת

הוכחה: נסמן פונקציית מרחק בכבוד היא l, באיטרציה הבאה היא l'. אז צ"ל ש $d_{l'}(s) > d_l(s)$.

נניח $s = v_1 \to v_2 \to v_3 \to \dots \to v_k = t$ מסלול מ-s ל-t
ברשת השיורית באיטרציה הבאה (קצר ביותר)

נטען למה מהכיתה (בהרצאה): אם (v,w) קשת שיורית ברשת השיורית החדשה,
אז $d_l(v) \leq d_l(w) + l'(v,w)$ (כאשר l' לפני התיקון של המיוחדות)
הסבר: נסתכל על סוג הקשת (v,w) ברשת השיורית הקודמת (של l).
אם זו קשת אחורית, אז $d_l(v) < d_l(w)$ וברור שמתקיים.
אם זו קשת בתוך אותה רמה, אז $d_l(v) = d_l(w)$ וברור שמתקיים.
נותר המקרה בו (v,w) הקשת קדמית. במקרה זה,
$d_l(v) = d_l(w) + l(v,w)$.
אז צ"ל שבמקרה זה $l(v,w) \leq l'(v,w)$. אם לא, אז $l(v,w)=1$
ו-$l'(v,w)=0$. אז $l(v,w)=1$, לכן הקיבול השיורי של (v,w) קטן מ-3Δ
ברשת של l, ובשביל ש-$l'(v,w)=0$ צריך שהוא יהפוך לקשת מיוחדת או
שקיבולו של יעלה לפחות ל-3Δ.
המקרה השני לא ייתכן, כי בשביל זה צריך להזרים ב-(w,v) שלא ברשת
השיורית. (כי לא admissible, כי $d_l(v) = d_l(w) + l(v,w) = d_l(w) + 1$)
האם ייתכן שזו קשת של l'? אם, אבל הטענה מדברת על לפני
התיקון של קשתות מיוחדות, לכן $l(v,w)=0$ רק במקרה הקודם.

מהטענה הזו נקבל
$$d_l(s) \leq d_l(v_2) + l'(s,v_2) \leq$$
(1) $$\leq \dots \leq l'(v_1,v_2) + l'(v_2,v_3) + \dots + l'(v_{k-1},v_k) = d_{l'}(s)$$
ומכיוון ש $d_{l'}(s)$ לא משתנה לאחר התיקון של הקשתות המיוחדות,
נסיק ש $d_{l'}(s) \geq d_l(s)$, נותר להראות שמדובר באי-שוויון חזק.
נניח בשלילה ש $d_l(s) = d_{l'}(s)$

משום שיש לנו כבר ברמה תוספת (ב l), לפחות אחת הקשתות

במסלול $v_1 \to v_2 \to \dots \to v_k$ (ב l') לא admissible ברשת

ב l, נאמר $(v,w) = (v_i, v_{i+1})$.

לכן $d_l(v) < d_l(w) + l(v,w)$. בפרט $d_l(v) \le d_l(w)$. (l אחרי התיקון של המחברים)

מטרתנו היא להראות ש $d_l(v) < d_l(w) + l'(v,w)$, ואז נקבל שורה 3

הזה שוויון (1Δ לפחות) הוא הפך, וסתירה.

כי θ (ג) אינו כלמה הקודמת, $d_l(v) \le d_l(w) + l(v,w)$.

- למשל, אם (v,w) הקשת אחרי של l, אז $d_l(v) < d_l(w)$
  ואז ברור $d_l(v) < d_l(w) + l'(v,w)$.
- באופן יותר כללי, אם $d_l(v) < d_l(w)$ אז ברור
- אם $l(v,w) = 0$, תיקון טריוויאלי

המקרה הבעייתי היחיד שנותר הוא ש $d_l(v) = d_l(w)$,

$l(v,w) = 1$ ו $l'(v,w) = 0$, ואז אכן המסקנה שלנו לא מתקיימת.

אבל איך זה הגיוני? $\underbrace{l(v,w) = 1}_{\text{(אחרי התיקון)}}$, $\underbrace{l'(v,w) = 0}_{\text{(לפני התיקון)}}$ אומר ש קודם הקיבול

השיורי היה קטן מ 3Δ וכעת הוא גדול ממנו. לכן הגדלנו

בקשת (v,w). כלומר הקשת (w,v) admissible ב l, ומכיוון

ש $d_l(v) = d_l(w)$ נקבל שבהכרח $l(w,v) = 0$.

כמו כן, משום שבאיטרציה הקודמת הוזרמו לכל היותר Δ יחידות, הקיבול

ל (v,w) גדל בלכל היותר Δ. משום ש $u_{l'}(v,w) \ge 3\Delta$, נקבל

$u_l(v,w) \ge 2\Delta$.

לכן, נקבל ש (v,w) הקשת $\underbrace{\text{מחדש!}}_{\text{(ב } l\text{)}}$ לכן $l(v,w) = 0$, סתירה.

לכן מקרה בעייתי זה לא יתכן, כנדרש.

קיבלנו שלאורך המסלול יש (v,w) כך ש $d_l(v) < d_l(w) + l'(v,w)$, לכן

עם (1) $d_l(s) < l'(v_1,v_2) + \dots + l'(v_{k-1},v_k) = d_{l'}(s)$ כנדרש.

②(א) נוכיח למה: יהי v קודקוד חסום ו-w בן כך ש-$(v,w)\in E$. אזי בכל שלב ש-v נחסם, הקשת (v,w) רוויה או ש-w חסום.

הוכחה: מכיוון ש-v חסום, בשלב שחסמנו אותו כבר עברנו על כל הקשתות היוצאות מ-v. בפרט, על (v,w). כלומר, בקודמין משמע, לכן היא היתה (v,w) במצב רוויה. איך ייתכן שהיא פתאום לא רוויה? רק אם w נחסם ואשר עוברים על הקשת זו.
לכן אם (v,w) לא רוויה בשלב שחוסמים את v, בהכרח ש-w חסום.

נעבור להוכחת הטענה. נניח בשלילה שהיא לא נכונה, ויהי v קודקוד שבו יש שלב בשלב בו v חסום ויש מסלול מ-v ל-t. ניקח v' להיות ה-v הקרוב ביותר ל-t (ברשת השיורית) החסום עבורו יש מסלול כזה.

v' is blocked, $v'\to v_1\to v_2\to\dots\to t$

אם $v_1=t$, מהלמה הקודמת נקבל שבהכרח (v,t) רוויה ואז סתירה. אחרת, אורך המסלול >1.
מהלמה v_1 חסום או (v',v_1) רוויה. הראשון לא ייתכן כי אז סתירה לכך ש-v' הוא הקרוב ביותר ל-t עם תכונה זו. גם השני לא ייתכן, כי הנחנו שזה מסלול שקיים ברשת השיורית בשלב זה.
לכן סתירה בכל מקרה, והנחת השלילה שגויה.

(ב) נניח $n-1$ פעולות discharge על קודקודים $v_1,\dots,v_{n-1}$

מכיוון שאפשרי לעשות discharge רק על $v\notin s,t$, כלומר $n-2$ קודקודים, נקבל שיש $j>i$ כך ש-$V_i=V_j$. נתבונן בסדר הפעולות

$V_i, V_{i+1},\dots, V_j$

לא ייתכן ש-$j=i+1$, כי כאשר מסיימים discharge על V_i, $e(V_i)=0$.

נקרא מעכשיו לפעולות האלה: $i, i+1,\dots, j$

אם בשלב i, $v=v_i$ היה לא חסום ובשלב j הוא
כן חסום - סיימנו. נחלק למקרים:

(I) אם בשני השלבים v לא חסום. בגלל סדר עשיית הפעולות,
לפני שעושים discharge ל-v בשלב ה-i, לכל v שכן w לא חסום
(כאמור w קודם טופולוגית ל-v), $e(w)=0$ (באותו אופן
לכל v שכן r כך ש-v קודם לו טופולוגית, r חסום גם
כן $e(r)=0$ כי עברנו עליו קודם באותה איטרציה ולאחר מכן אולי push עבורנו חסום)
עד לשלב ה-j, $e(v)=0$
אז נניח שקבוצת הקודקודים החסומים לא השתנתה, נקבל שכל
w כנ"ל כאלה עדיין עם $excess=0$ לכל אורך הפעולות $i,\dots,j$:
נניח שלא, למשל יש v שכן w לא חסום עם $excess>0$, רחוק מקסימלי.
סימן שיש (z,w) שהגדרנו עליה וגם לא חסום - לא ייתכן, כי
v שכן z וסתירה למקסימליות, או שמדובר $(w,\tilde{v})$ כך ש-$\tilde{v}$ חסום
שעשינו עליו pull - שוב לא ייתכן, כי $e(w)=0$ כבר אז, וכמו כן
v ניתן לראות שמכך נובע $e(\tilde{v})=0$ (בפרט, כי $\tilde{v}$ נבחר טופולוג)

באותו אופן, לכל שכן v, $e(r)=0$.
לכן במקרה זה גם כשמגיעים לשלב j, עדיין $e(v)=0$! סתירה
לכן שעושים discharge רק על קודקודים פעילים. לכן בהכרח שקבוצת הקודקודים
החסומים השתנתה.

(II) אם בשני השלבים v חסום, באותו אופן לכל שכן v, r
חסום (לפני (וגם אחרי) השלב ה-i, מתקיים $e(r)=0$.
לכן אם מניחים שקבוצת הקודקודים החסומים לא משתנה, נקבל כמו קודם
שבשלב ה-j עדיין $e(v)=0$, שוב סתירה.

בשני המקרים ראינו שלא ייתכן שקבוצת הקודקודים החסומים נשארת כמו שהיא,
לכן סיימנו.

(ג) נוכיח קודם שעובד תוך $O(n^2)$ שלבים.
מטענה ב כיתה שהוא שיש פחות מ n^2 פעולות discharge,
כי שיש יותר מזה, אז כל $s,t\neq v$ חסום לאחר n פעולות, (נראה
שבכיוון יש $O(n^2)$ פעולות discharge.

אם אנחנו במצב שבו כל $v\neq s,t$ חסום. יהי v הפעיל הרחוק ביותר
מכל כיתה. אז אחרי שעושה לו discharge, הוא יפסיק להיות פעיל ולא
יהיה יותר פעיל לעולם, כי כל $u\to v$, הוא רחוק יותר ולכן
$e(v)=0$ כאשר עושים discharge על v, ומכוון שכולם חסומים לה
יישאר כך עד סוף האלג'.

לכן מרגע שכולם חסומים, יש לנו לכל היותר $O(n)$ פעולות discharge
נוספות.
לכן סה"כ יש לנו $O(n^2)$ פעולות discharge.

20/20

כמו שראינו בכ', את כל ה discharge על v הוא מפסיק
להיות פעיל, או בגלל שהוא יהיה פעיל שלא מס' הקודקודים החסומים
ג'ג לגבול.
לכן כמה פעמים עוברים סה"כ על הקשתות של v? $O(d_{in}(v)+n)$ לכל
היותר כאשר v לא חסום ($d_{in}(v)$ קשתות, ולכל היותר n "החזרות" של v
revive
ובדומה $O(d_{out}(v)+n)$ כאשר v חסום.

לכן סה"כ העבודה על v היא $\leq O(d_{in}(v)+d_{out}(v)+2n)$

לכן סה"כ העבודה היא $O\left(\sum_{v}(d(v)+n)\right)=O(2m+n^2)=O(n^2)$

לכן עובד ב $O(n^2)$ זמן. נותר להראות נכונות.
נמשיך עד סוף זה.

נניח שהגענו לסוף האלג' ,ועדיין הזרימה שלנו f לא חוסמת.
כלומר, יש מסלול $s \to v_1 \to v_2 \to \dots \to v_k \to t$

אם אחד מה-v_i חסום-סגירה לסוף אז, כי אין מסלול מ-v_i ל-t.

אחרת, אם v_i לא חסום, ובפרט v_1 לא חסום. לכן מעשים שפתחנו
הזרימה (s,v_1) רוויה, היא עדיין רוויה, מכיוון כי לא עשינו push, כי v_1
לא חסום עדיין אפילו). לכן שוב מה לא מסלול שיפור.

הראנו לכן שבסוף האלג', אין מסלול ב G_f מ-s ל-t, ולכן לפי
המשפט זו זרימה חוסמת.

5. נתונה MCC f ב $G=(V,E)$, איך לחשב פוטנציאלים (מחיר)?

(א) נתבונן ב f, ונבנה את הגרף השיורי ב G_f. נשים על הקשתות את המשקלים שהם: $C(e)$.

נוסיף קודקוד s לגרף G_f, ונוסיף קשתות (v,s) במשקל 0 לכל $v \in V$.

עד כה סיבוכיות לינארית

כעת נחשב בעזרת בלמן-פורד את המסלולים הקצרים אל s (כלומר, הופכים הקשתות ומריצים בלמן פורד מ s) עולה $O((|E|+|V|)(|V|+1))$.

אז יש לנו לכל v, $\pi(v) = \delta(v,s)$ נראה שהוא משקל/ שלנו.

תהי $e=(u,v)$ קשת שיורית. אז מתכונות מק"ב

$$\delta(u,s) \leq \delta(v,s) + C(e)$$

לכן

$$\pi(u) \leq \pi(v) + C(u,v)$$

$$\Rightarrow C(u,v) + \pi(v) - \pi(u) \geq 0$$

$$\Rightarrow C^{\pi}(u,v) \geq 0$$

כנדרש.

זמן ריצה: $O(m \cdot n)$ (בהנחה ש $m \geq n$) (ואחרת $O(mn+n^2)$)

(ב) יש פוטנציאלים $\pi(v)$, איך נחשב f?

נחשב $C^{\pi}(u,v)$ לכל קשת.

נזכור שאם $C^{\pi}(u,v)<0$, אז קשת (u,v) חייבת להיות רוויה.

כלומר $f(u,v) = u(u,v)$

מה אם $C^{\pi}(u,v)>0$? אז $C^{\pi}(v,u) = -C^{\pi}(u,v) < 0$

ואז (v,u) חייבת להיות רוויה, כלומר $f(u,v)=0$.

אם יש לנו $C^{\pi}(u,v)$ לכל $(u,v) \in E$, ואפי' לא ניתן לבצע לכל $C^{\pi}(u,v) \neq 0$ מה צריכה להיות הזרימה שם

לכן נתחיל מלשים

$f(u,v) = u(u,v) \quad \forall C^{\pi}(u,v) < 0$

$f(u,v) = 0 \quad \forall C^{\pi}(u,v) > 0$

כלומר עכשיו, יש אוסף צמתים A עם עודף, ואוסף צמתים B עם חוסר. כי עכשיו שאר על הקשתות עבורן $C^{\pi}(u,v)=0$, כרגע הזרימה בהן 0.

$$A = \{v \in V : \sum_{u \neq v} f(u,v) > 0\}$$

$$B = \{v \in V : \sum_{u \neq v} f(u,v) < 0\}$$

נתחיל מהגרף G,

ונבנה את הגרף G'. נמחק ממנו את הקשתות (u,v) עם $C^{\pi}(u,v)>0$ (הראינו כי אם f אופטימלי אז לא מזרימים שם) ואת הקשתות עם $C^{\pi}(u,v)<0$ (מתרוקן, רוויות). הקיבולים של הקשתות שנותרו הן $u(u,v)$

נוסיף צומת s ובור t, s מחובר לצמתי A, באופן הבא:
עבור $v \in A$, העודף של v הוא $e(v) = \sum_{u \neq v} f(u,v) > 0$, והקיבול של קשת (s,v) הוא $e(v)$.

כל צומת $v \in B$ מחובר ל-t באופן הבא, הקיבול של הקשת (v,t) הוא החוסר של v, כלומר $e(v) = -\sum_{u \neq v} f(u,v) > 0$.

⊕ כעת נחשב max-flow f' בגרף החדש G' מ-s ל-t.
כל זמן הריצה הוא לינארי פרט ל-max-flow, שם אני ב-$O(mn\log(n^2/m))$.

ניקח את f' ונהפוך אותה לפונקציה f'' ע"י

$f''(u,v)=0 \quad \forall C^{\pi}(u,v)>0, \quad f''(u,v)=u(u,v) \quad \forall C^{\pi}(u,v)<0$

$f''(u,v)=f'(u,v) \quad \forall C^{\pi}(u,v)=0$

נראה שזו סירקולציה: מכיוון ש T גזירות, יש g סירקולציה לפיהם.
אז לפי משפט מהכיתה ה"ל MCC, לכן בהגדרה $g(u,v)=U(u,v)$
עבור $C^{\pi}(u,v)<0$. לכן יש מסלולים $u \to \dots \to v_1 \to v$ שמעבירים
מ v אל u $U(u,v)$ זרימה, לכן הקשתות $C^{\pi}\leq 0$.
לפי מסלולים אלה ניתן להזרים מ s אל t $U(u,v)$ זרימה מ v
אל u בגלל הזרימה ⊛ (זה לקוח $C^{\pi}=0$ אם היא קיימת
בזמן, ועוד $C^{\pi}\leq 0$ אל מזרימים מ s אל t, לקבל הקשת
e ומשם לt.

לכן הזרימה המקסימלית ב⊛ מרווה כל הקשתות היוצאות מs (וגם
כל הנכנסות לt

לכן עבור $v \in A$, וגם עבור $v \in B$
$\sum f''(u,v)=0$
כי הרווחי שנכנס/יצא מפסה כמינת הזרם/מחסור בפתרון אופטימלי ל⊛.

לכן f'' סירקולציה.
כי שהינו מינימלי כמו כל סירקולציה; לפי $C^{\pi}(u,v)$, הינו
מזרימה עליה אפס. לכן לפי הקריטריון אופטימליות 2, היא אופטימלית.

לכן סה"כ זמן ריצה הוא כמו בע"א זרימה מקסימלית: $O(mn\log n)$.

$\frac{20}{20}$

(א) נראה ראשית שזו זרימה מקסימלית, שהאלג' עוצר. בכל שלב שבו שיפרנו, מגדילים מספר שלם של יחידות זרימה. לכן הקיבולים שלמים, והזרימה הנוכחית שלנו גדלה לפחות ביחידה אחת. לכן יש לכל היותר $|f|$ סיבובים, כאשר $|f|$ ערך הזרימה המקסימלית.
כמובן, כאשר עוצרים אין יותר מסלולים משפרים, לכן לפי משפט Ford-Fulkerson הזרימה בסוף היא מקסימלית.

נותר להוכיח כי מחירה הוא מינימלי.

<u>טענה:</u> תהי f הזרימה שאנו בונים משלב באלגוריתם. אז מתוך כל הזרימות f' עבורן $|f| \le |f'|$, f היא עם עלות מינימלית.

<u>הוכחה:</u> באינדוקציה על השלבים.
עבור f לאחר השלב הראשון, ברור כי היא עם עלות מינימלית כי בחרנו את המסלול הזול ביותר.
<u>שלב האינדוקציה:</u> נניח כי f כעת היא המינימלית, ותהי b הזרימה שמוסיפים לה בשלב זה. כעת נוכיח כי $f+b$ היא המינימלית.

נניח בשלילה שלא כך. אז יש g כך ש $|g|=|f|+|b|$ עם עלות מינימלית (קטנה יותר). נפרק את $f+b$ לזרימות על מסלולים $f_1,\dots,f_k$, לפי סדר עלות שהאלג' בחר מהקטן עד הגדול. אז לא ייתכן שניתן להזרים ב-f_1 בגרף השיורי G_g: אחרת ניתן לבטל זרימה בגודל שניתן להזרים ב-f_1 ולהזרים אותה ב-f_1 במקום (כי משקל f_1 הוא הקטן ביותר). לכן ב-f_1 לא ניתן להזרים ב-G_g (אחרת סתירה למינימליות g) למעשה, זה מראה ש $g(u,v) \ge f_1(u,v)$ לכל (u,v) עבורה $f_1(u,v)>0$ (כלומר שיש קשת ב-f_1 $f_1(u,v)>0$ שלא רוויה ב-g. אז היינו יכולים להחליף את המסלול שמגיע מ-s אל u ב-g במסלול ב-f_1 ואת המסלול מ-v אל t ב-g במסלול המתאים ב-f_1, ובכך להקטין עלות)

לכן ניתן להמשיך עם $g'=g-f_1$ זרימה חוקית באותו אופן, ו $i=2$.

בסוף נקבל $g-f_1-f_2-\dots-f_k$ את הגרף של הזרם 0, כי $|g|=|f_1+\dots+f_k|=|f|+|0|$ והיא זרימה חוקית

לכן הרכבה של 0 זרימות. לכן $g=f_1+f_2+\dots+f_k$ סתירה

לכן שהרכבה נכונה יותר.

מהטענה בסוף התרגיל נובע שקיבלנו זרימה מקסימלית עם עלות מינימלית.

(ב) עלות מקסימלית של קשת היא C, קיבול מקסימלי U. להראות מימוש.

נתבונן בהגשות יחסות מ-s. יש לכל היותר $n-1$ צלעות. לכן הזרימה המקסימלית לא עולה על $n \cdot U$. לכן יש לכל היותר nU פאזות.

<u>מימוש:</u> נתחיל בזרימה אפסית f.

1. בנה רשת שיורית G_f
2. הרץ אלג' מק"ב מ-s לפי משקלים $c(e)$ ב-G_f.
3. מצא את המק"ב מ-s ל-t, וחשב קיבולו.
4. הזרם במסלול זה את הקיבול. של נקבל זרימה b.
5. $f \leftarrow f+b$.

ברור שהמימוש מחזיר את השלב. עלות

עלות איטרציה אחת היא מק"ב $+|V|+|E|$

או נשתמש ב-Dijkstra ונקבל $|E|+|V|\log|V|$ עלות איטרציה. יש לכל היותר nU פאזות, לכן נקבל זמן ריצה

$O((m+n\log n)nU)$.

20/20

⑤ נניח שיש לנו את העץ T שלנו. לצד כל קודקוד נשמור מספר מזהה (id) שיאמר לנו באיזה עץ בגרף הוא כרגע. בהתחלה, כל הקודקודים מקבלים מזהה 0. נסמן את הנוכחי כ ID

```
for v∈V
    id(v) = 0
ID = 0
```

כאשר עושים Cut(u,v), צריך לשנות את המזהה של העץ של v או את של העץ של u. איך נבחר? לפי מי שיותר קטן.

כלומר,

```
Cut(u,v)
  ⓪ ID = ID+1
  ① remove edge (u,v)
  ② Check which tree, of u or of v is smaller.
     let that tree be T'
  ③ for v∈T'
        id(v) = ID
```

20

20

אז הסיבוכיות של Cut(u,v) היא: $O(\min\{|T(v)|, |T(u)|\})$
(T(v), T(u) הם העצים של v,u בהתאמה לאחר החיתוך).
משום ששלב זה דורש, ניתן לבצע את ② בזמן זה ע"י DFS/BFS "במקביל" בשניהם, צעד פה צעד פה, עד שאחד מהם נגמר.

קל לממש האם הן מחוברות:

```
connected (u,v)
    return id(u) == id(v)
```

<u>למה:</u> לכל v, משנים id(v) לכל היותר $\log n$ פעמים.
<u>הוכחה:</u> כל פעם שמשנים את id(v), |T(v)| קטן לפחות פי 2 כי משנים לעץ הקטן. משום ש $|T(v)| \geq 1$ תמיד, id(v) משתנה לכל היותר $\log n$ פעמים.

לכן, המסדרה של k' פעולות cut, משלמים לכל היותר $O(n\log n+k')$,
$n\log n$ על סה״כ השינויים בלו, ועוד לשינויי בלו לכל פעולת cut משלמים
$O(1)$.

ברור שהסיבוכיות של connected היא $O(1)$.
לכן הסיבוכיות של סדרת פעולות באורך k (מעורבת) היא
$O(n\log n+k)$
(לא שיפור ביחס ל $O(k\log n)$ כאשר $k>>n$)

<u>הערה:</u> זה רובו פורמלי עד פונקציה פוטנציאל, אם בסימון $T(v)$
העץ של v, ובהנחה שהעלות האמיתית של cut היא
$c\cdot\min\{|T(v)|,|T(u)|\}$, נגדיר
פוטנציאל:

$$\Phi=\frac{c}{\log 2}\sum_{v\ \text{קודקוד}}\log|T(v)|$$

אז

$$\Phi_0=\Theta(n\log n)$$

נניח $cut(u,w)$

$$amort(cut)=c|T'(u)|+\frac{c}{\log 2}\sum_{v}\log\frac{|T'(v)|}{|T(v)|}\le$$

T' זה רכיב המנותק

בה״כ $|T'(u)|\le|T(u)|$

$$\le c|T'(u)|+\frac{c}{\log 2}\sum_{v\in T'(u)}\log\frac{|T'(v)|}{|T(v)|}+O(1)\le c|T'(u)|+\frac{c}{\log 2}\cdot|T'(u)|\log\frac{1}{2}+0.$$

לכל המחוברים שנותרו
$|T'(v)|\le|T(v)|$

עבור
$v\in T'(u)$
$T(v)\le\frac{1}{2}T(v)$
לפי בה״כ הנ״ל

מתבטל

$= O(1)$

$$amort(connected)=O(1)+\overset{0}{\Delta\Phi}=O(1)$$

לכן עבור סדרת k פעולות היא

$$\Phi_0+k\cdot O(1)=\underline{O(n\log n+k)}$$