3.11.2005

אלגוריתמים - תרגול

תרגיל:

נתונה קבוצה של מס' טבעיים $A=\{a_1,..,a_n\}$

ומס' טבעי b.

נרצה למצוא תת קבוצה מינימלית $S\subseteq A$

כך שיתקיים:

$$\sum_{a_i\in S} a_i \geq b$$

פתרון:

נמיין את A ונתחיל להוסיף ל-S איברים מהגדול לקטן עד שנקבל סכום גדול מ-b.

```
Sort(A)
S ← ∅
sum ← 0
i ← 1
while (sum < b) do
    S ← S ∪ {a_i}
    sum ← sum + a_i
    i ← i+1
```

מיון: $O(n\log n)$

השאר: $O(n)$

סה"כ: $O(n\log n)$

Greedy Algorithm

בכל צעד תוסיף את מה שנראה הכי טוב באותו רגע

הוכחת נכונות:

נניח הפתרון של האלגוריתם הוא $\{a_1,...,a_n\}$

נניח שקיים $S'\subseteq A$ בגודל קטן מ-K כך שמתקיים:

$$\sum_{a_i\in S'} a_i < b$$

נסמן $j=|S'|<K$

$$\sum_{a_i\in S'} a_i \leq \sum_{i=1}^{j} a_i < b$$

אחרת האלגוריתם היה עוצר אחרי j צעדים

תרגיל:

נתונה קבוצת פעילויות / אינטרוולים $A=\{1,\dots,n\}$
ופעילות ה-i מזמן התחלה s_i וזמן סיום f_i,
כלומר האינטרוול $[s_i,f_i]$.
רוצים למצוא תת קבוצה מקסימלית $S \subseteq A$
בלי חפיפות.

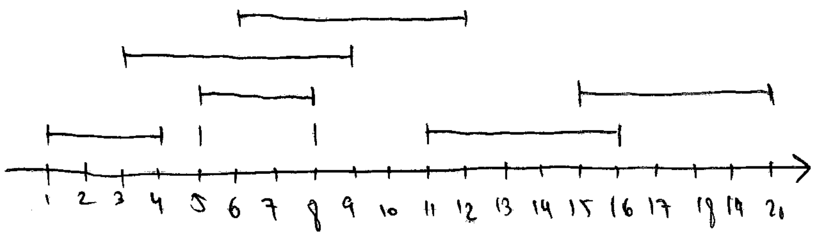
פתרון:

(1) נמיין את האינטרוולים לפי זמני הסיום, נניח:

$$f_1 \le f_2 \le \dots \le f_n$$

(2) נאתחל $S=\{1\}$, $maxS=1$

(3) לכל $i=2,3,\dots,n$ אם $s_i \ge f_{maxS}$ נוסיף את i ל-S
ונעדכן $maxS=i$.



$(1,4)$	$(5,8)$	$(3,9)$	$(6,12)$	$(11,16)$	$(15,20)$
1	2	3	4	5	6

$S=\{1\}$

$s_2 \ge f_1 \Rightarrow S=\{1,2\}$

$s_5 \ge f_2 \Rightarrow S=\{1,2,5\}$

מיון: $O(n\log n)$

השאר: $O(n)$

סה"כ: $O(n\log n)$

הוכחת נכונות

פתרון חוקי - קבוצת אינטרוולים לא חופפים
נניח $S=\{a_1,\dots,a_k\}$ הפתרון של האלגוריתם.
ונניח בשלילה $S'=\{b_1,\dots,b_j\}$ פתרון חוקי וגם $k<j$.
נניח: $a_1<a_2<\dots<a_k$, $b_1<b_2<\dots<b_j$

נוכיח באינדוקציה על i שלכל $1 \le i \le n$
$\{a_1,\dots,a_i,b_{i+1},\dots,b_j\}$ הוא פיתרון חוקי.

$i=1$: $a_1=1$ - לפי האלגוריתם, ו-1, $f_1 \le f_{b_1}$
וכן אם b_1 לא חופף לבאים אחריו
אז גם $a_1=1$ לא חופף להם.

לפי האלגוריתם a_{i+1} הוא האינטרוול בעל זמן הסיום
המינימלי מבין אלה שמתחילים אחרי סיום a_i.
וכן, $f_{a_{i+1}} \le f_{b_{i+1}}$, וכן אם b_{i+1} לא חופף
לבאים אחריו אז גם a_{i+1} לא יחפוף להם.

קיבלנו ש- $\{a_1,\dots,a_k,b_{k+1},\dots,b_j\}$ פיתרון חוקי בסתירה
להנחה שהאלגוריתם לא הוסיף אינטרוולים אחרי a_k

∎

תרגיל:

נתונה סדרה של מספרים $x_1,\dots,x_n$
רוצים למצוא תת-סדרה רצופה בעלת סכום
מקסימלי.

למשל $-1, 4, -7, 3, -13, -2$

נחשב לכל $1 \le i \le n$:

$S_i^+ =$ הפיתרון האופטימלי עבור
$x_1,\dots,x_i$ שמכיל את x_i

$S_i^- =$ כנ"ל שלא מכיל את x_i

אתחול: $S_1^+ = x_1$; $S_1^- = 0$.

לכל $2 \le i \le n$: $S_i^+ = \max(x_i, S_{i-1}^+ + x_i)$

$S_i^- = \max(S_{i-1}^+, S_{i-1}^-)$

אלגוריתם נוסף - רגיל

$x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}$ רוצים למצוא תת-סדרה רצופה

בעלת סכום מקסימלי.

נחשב לכל i:

$S_i^+ =$ הסכום המקסימלי של תת-
הסדרה הרצופה ~~[illegible]~~
של $x_1,\dots,x_i$

$S_i^- =$ שמסתיימת או x_{i-1}
כנ"ל אבל ללא x_i

נגדיר: $S_1^- = 0 \qquad S_1^+ = x_1$

$$S_i^+ = \max(x_i, S_{i-1}^+ + x_i)$$

$$S_i^- = \max(S_{i-1}^+, S_{i-1}^-)$$

הפתרון:

$$S = \max(S_n^+, S_n^-)$$

מציאת תת הסדרה:

נחפש מ-n $i=n$ ונלך אחורה עד שנמצא i עבורו

~~כאשר~~ $S = S_i^+$ $\Leftarrow$ תת הסדרה מסתיימת

ב-x_i, נמשיך ללכת

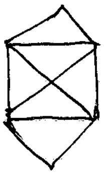
אחורה עד שנקבל סכום S

אז תחילת תת הסדרה

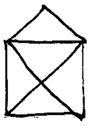
$x_j,\dots,x_{i-1},x_i$

גרפים

הגדרה:



מעגל אוילר בגרף (מכוון או לא) הוא מעגל
(לא בהכרח פשוט) שעובר על כל קשת של הגרף
בדיוק פעם אחת.



מסלול אוילר כנ"ל אבל מסלול, כלומר,
קודקוד ההתחלה שונה מקודקוד הסיום

טענה:

גרף לא מכוון (לא בהכרח פשוט) וקשיר מכיל מעגל אוילר

$\Longleftrightarrow$

כל הדרגות זוגיות

בנוסף: אם יש מעגל אוילר אז ניתן למצוא אותו
בזמן $O(|E|)$.

הוכחה:

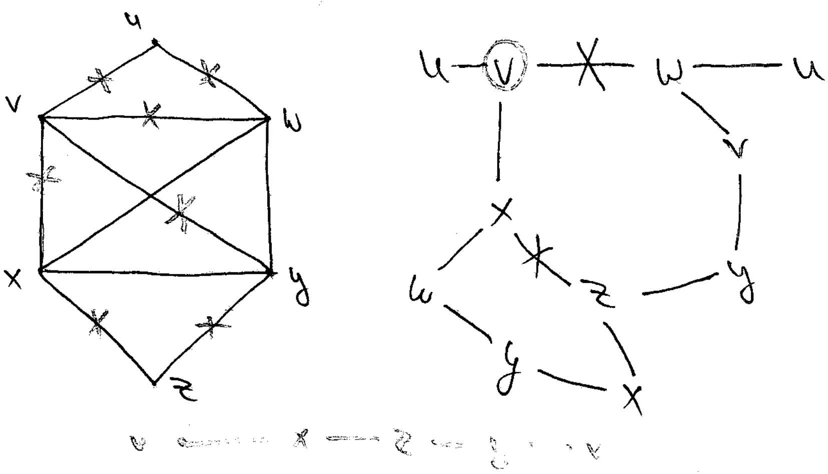
($\Leftarrow$) נניח שהגרף מכיל מעגל אוילר.
נטייל על המעגל החל מקודקוד u כלשהו.
לכל $u \neq v$ כל מעבר דרך v נכנסים אליו ויוצאים
ממנו $\Leftarrow$ תורם 2 לדרגה, ולכן, הדרגה זוגית.
עבור u - קשת ראשונה, קשת אחרונה, וכל מעבר
נוסף תורם עוד 2 - סה"כ דרגה זוגית.

($\Rightarrow$) נניח שכל הדרגות זוגיות.
אלגוריתם למציאת מעגל אוילר:

1. נבחר קודקוד u כלשהו.

נבחר קשת (u,v) של u כלשהי
נמחק את (u,v) מהגרף ונוסיף אותה למעגל
שאנחנו בונים ונעבור ל-v

הערה: לאחר שלב (1) יש לנו מעגל
ובגרף שנשאר כל הדרגות זוגיות



(2) כל עוד נשארו קשתות בגרף:
נבחר קודקוד v על המעגל שנשארו לו קשתות
נבצע את (1) החל מ-v
ונצרף את המעגל החדש לישן.

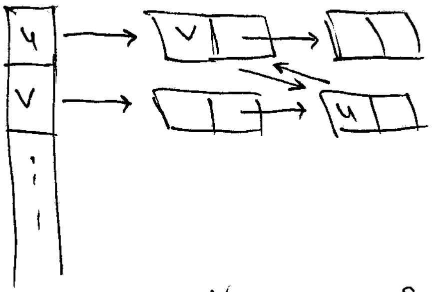
הוכחת נכונות

אם האלגוריתם מסיים אז הוא אכן מוצא
מעגל אוילר.

(1) נראה שאם מתחילים ב-u בהכרח נחזור אליו
כל עוד אנחנו ב-$u \neq v$ לפני שנכנסנו ל-v
דרגתו הייתה זוגית לכן נשארה קשת
שאליה נוכל לצאת.
אם הקשתות סופי אזי בשלב כלשהו נגיע
חזרה ל-u.

(2) אם נשארו קשתות, יש בהכרח קודקוד על
המעגל שנשארו לו קשתות כי הגרף קשיר

נובע: האלגוריתם אכן יס"ם.



זמן ריצה

נחזיק את הגרף ברשימות שכנות.

עם השימוש די-כיווני ולכל קשת (u,v) יהיו מצביעים בין v ברשימה של u ו-u ברשימה של v.

את המעגל נחזיק ברשימה מקושרת.

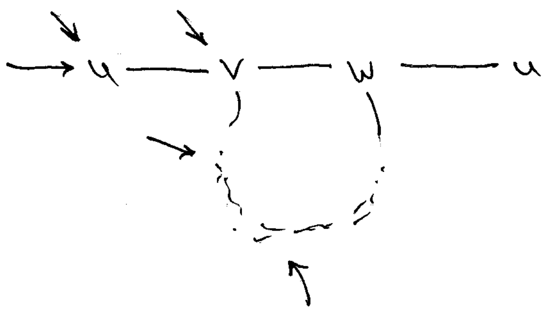
(1) בכל צעד נבחר את השכן הראשון ברשימה והמחיקה וההוספה למעגל - $O(1)$

סה"כ ס הריצה של (1) - $O(|E|)$

בשביל (2) ~~[illegible]~~ נשמור מצביע למעגל שבהתחלה יצביע על הקודקוד שממנו התחלנו.

בכל פעם שאנחנו ב-(2) נתקדם עם המצביע על המעגל - עד שנמצא קודקוד שנשארו לו קשתות

סה"כ מעבר אחד על המעגל: $O(|E|)$



טענה:

גרף לא מכוון וקשיר מכיל מסלול אוילר

$\Longleftrightarrow$

יש 2 קודקודים מדרגה אי-זוגית והשאר מדרגה זוגית.

17.11.200

אלגוריתמים

טענה:

בגרף מכוון שגרף הבסיס שלו קשיר (הבסיסי = לא מכוון)

(1) יש מעגל אוילר $\iff$ $\forall v\in V \quad d_{in}(v)=d_{out}(v)$

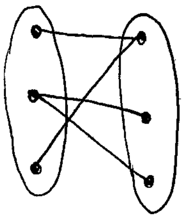
(2) יש מסלול אוילר $\iff$ $\exists\, u,w\in V \quad d_{in}(u)=d_{out}(u)+1$

$d_{out}(w)=d_{in}(w)+1$

(וגם)

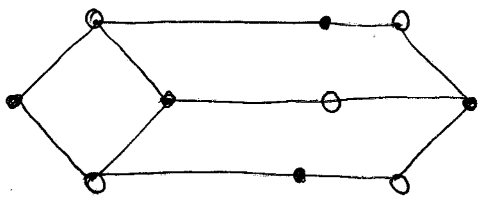
$\forall\, v\neq u,w \quad d_{in}(v)=d_{out}(v)$

הגדרה



גרף לא מכוון $G=(V,E)$ נקרא דו-צדדי אם קיימת חלוקה של V לשתי קבוצות זרות U ו-W כך שלכל קשת קצה אחד ב-U והשני ב-W

למשל:



טענה:

גרף לא מכוון $G=(V,E)$ הוא דו-צדדי

$\iff$

אין בו מעגל באורך אי-זוגי.

הוכחה

($\Longleftarrow$) נניח G דו-צדדי.

כל קשת מעבירה צד ולכן כדי לסגור מעגל, כלומר, לחזור לצד ההתחלה נצטרך מס' זוגי של קשתות

($\Longrightarrow$) נניח שאין ב-G מעגל אי-זוגי.

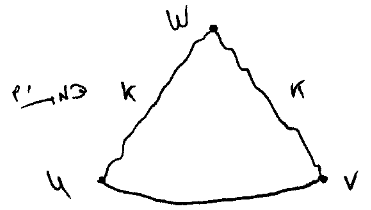
נראה אלגוריתם שמחלק ל-2 צדדים.

* נריץ BFS מקודקוד s כלשהו.

* נניח שהגרף קשיר, אחרת נעבוד על
כל רכיב קשירות בנפרד.

נגדיר: U - כל הקודקודים ברמה זוגית
W - כל הקודקודים ברמה אי-זוגית
בגרף לא מכוון, לכל קשת $(u,v)\in E$
u,v באותה רמה או
u,v ברמות עוקבות
נניח בשלילה שקיימת קשת (u,v)
כך ש-u ו-v באותה רמה.

יהי w האב הקדמון המשותף הנמוך ביותר
של u ו-v בעץ ה-BFS
אז המסלול $u \rightsquigarrow w$, $v \rightsquigarrow w$ בעץ
ביחד עם הקשת (u,v) מהווים מעגל
אי זוגי בסתירה להנחה.



הערה: קיבלנו אלגוריתם לינארי שבודק
אם גרף הוא דו-צדדי ואם כן -
מוצא חלוקה לצדדים.

הגדרה: גרף המק"ב מ-s ל-t בגרף $G=(V,E)$
הוא תת-גרף של G שמכיל את כל
הקודקודים והקשתות שנמצאים במק"ב
מ-s ל-t ורק אותם.

הגדרה: גרף המק"ב מ-s
כנ"ל אבל מ-s לכל $v\in V$

אלגוריתם למציאת גרף המק"בים מ-s בגרף מכוון

(מק"ב = מסלול קצר ביותר)

(1) נריץ BFS מ-s

(2) נגדיר את גרף המק"בים:

הקודקודים: כל $v \in V$ שנגיש מ-s $(d(v) < \infty)$

הקשתות: כל הקשתות ב-G שהולכות מרמה לרמה הבאה, כלומר,

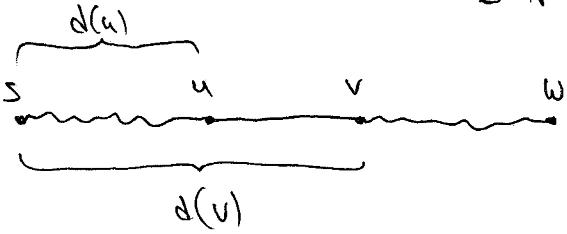
כל $(u,v) \in E$ עבורה $d(v) = d(u)+1$.

זמן ריצה

$O(|E| + |V|)$ - BFS + מעבר על כל הקשתות והקודקודים כדי לבדוק מי יהיה בגרף המק"בים

נכונות

נראה שקשת $(u,v) \in E$ משתתפת במק"ב מ-s $\iff d(v) = d(u)+1$

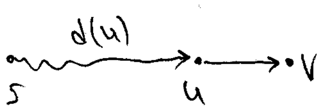


$(\Leftarrow)$ אם (u,v) משתתפת במק"ב מ-s אזי גם

תתי המסלולים $s \rightsquigarrow u$ ו- $s \rightsquigarrow u \to v$

הם קצרים ביותר ולכן $d(v) = d(u)+1$.

$(\Rightarrow)$ נניח $d(v) = d(u)+1$



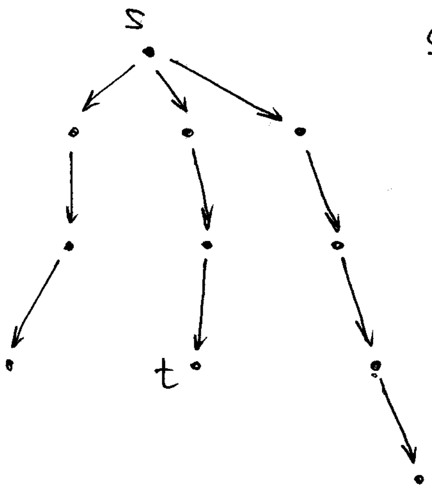
אז מק"ב בין s ל-u

בתוספת הקשת (u,v)

נותן מסלול באורך $d(u)+1 = d(v)$

מ-s ל-v כלומר מק"ב.

אלגוריתם למציאת גרף המק"צ מ-z ל-t בגרף מכוון



(1) נמצא את גרף המק"צ מ-z
נסמנו G'

(2) נהפוך את כיוון הקשתות
בגרף G' ונריץ BFS
מ-t.
נמחק כל קודקוד שלא
נגיש מ-t ואת הקשתות
שלו.

<u>זמן ריצה</u>

$O(|E|+|V|)$ פעמיים BFS

<u>נכונות</u>

אחרי (1) G' מכיל את כל המסלולים הקצרים
מ-z ל-t וגם אחרי (2) כי מחקנו רק
קודקודים וקשתות שאין מסלול מהם ל-t ב-G'

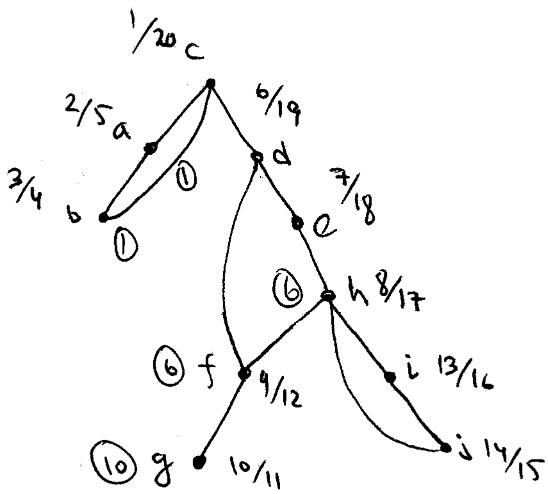
מצד שני כל קודקוד או קשת שנשארו משתתפים
במסלול קצר ביותר מ-z ל-t כי יש ב-G'
מסלול מ-z לקודקוד/קשת וממנו ל-t.
כלומר הקודקוד/קשת משתתף במסלול מ-z ל-t
ב-G' וזה בהכרח מק"ב כי G' מכיל רק קשתות
מרמה לרמה הבאה.

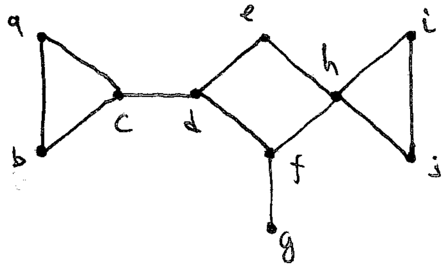
<u>הערה:</u> בגרף לא מכוון נהפוך כל קשת
לשתי קשתות אנטי מקבילות ונריץ את האלגוריתם
על הגרף המכוון שקיבלנו.

24.11.2005

הגדרה:

קודקוד מנתק בגרף לא מכוון הוא קודקוד שהסרתו מנתקת את רכיב הקשירות שלו.





אלגוריתם למציאת הקודקודים המנתקים

נריץ DFS

נגדיר פונק' low - $low(v)$ - כמה גבוה בעץ אפשר להגיע מ-v או מצאצאיו של v ע"י קשת אחורית.

$$low(v) = \min\Big(d(v),\ \min\big(d(u) \mid (w,u) \text{ קשת אחורית, } w \text{ הוא } v \text{ או צאצא של } v\big)\Big)$$

נחשב את low תוך כדי ה-DFS, בסיום הטיפול בקודקוד. (נוכל לחשב את $low(v)$ אם ה-low של הבנים שלו כבר חושב.)

$$\begin{aligned} low(v) = \min\Big(&d(v), \\ &\min\big(d(u) \mid (v,u) \text{ קשת אחורית}\big), \\ &\min\big(low(w) \mid w \text{ בן של } v\big)\Big) \end{aligned}$$

זמן הריצה יישאר $O(|E|+|V|)$ כי חישוב $low(v)$ ייקח $O($מס' הקשתות של $v)$.

<u>טענה:</u>

יהי v שאינו שורש ב-DFS

v מנתק $\Longleftrightarrow$ יש לו בן u שעבורו $low(u) \geq d(v)$

<u>הוכחה:</u>

$(\Longrightarrow)$ $low(u) \geq d(v)$ $\Leftarrow$ אין קשת אחורית מהצאצא של u שמגיעה מעל v. כלומר, הסרת v מנתקת את u מההורה של v.

$(\Longleftarrow)$ אם v מנתק אז יש לו לפחות בן אחד u שהסרת v מנתקת אותו מההורה של v. כלומר, אין קשת אחורית מהצאצא של u שמגיעה מעל v ומכאן נובע:

$$low(u) \geq d(v)$$

שורש מנתק $\Longleftrightarrow$ יש לו יותר מבן אחד (כי אין קשתות בין תתי עצים שונים)

הגדרה

גרף לא מכוון נקרא דו-קשיר אם הוא קשיר ואין בו קודקודים מנתקים.

הגדרה:

רכיב דו-קשירות הוא תת-גרף דו-קשיר מקסימלי ביחס להכלה (אם נוסיף לו דברים כבר לא יהיה דו-קשיר)

ל-2 רכיבי דו-קשירות יש לכל היותר קודקוד משותף אחד (קודקוד מנתק) ולכן הם מהווים חלוקה של הקשתות.

הגדרה:

גשר בגרף לא מכוון הוא קשת שהסרתה מנתקת את רכיב הקשירות שלה.

טענה

קשת איננה גשר $\iff$ היא נמצאת על מעגל פשוט.

הוכחה

(u,v) איננה גשר $\iff$ כשנסיר אותה יישאר ~~מס~~ מסלול בין (u,v)

$\iff$ היא נמצאת על מעגל פשוט (המסלול + הקשת)

טענה

גרף לא מכוון וקשיר ניתן לכוון לגרף קשיר בחוזקה

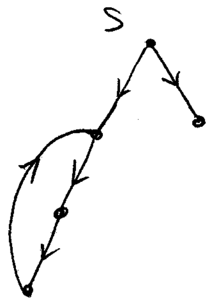
$\Longleftrightarrow$

אין בו גשרים.

הוכחה:

($\Leftarrow$) נניח כיוונו את G לגרף קשיר בחוזקה
אז לכל קשת (u,v) אם כיוונו אותה
מ-u ל-v אז יש גם מסלול מ-v ל-u
כלומר, נמצאת על מעגל פשוט.

($\Rightarrow$) נניח אין ב-G גשרים
נריץ DFS ונכוון קשתות עץ מההורה
לבן, וקשתות אחוריות מהצאצא לאב הקדמון.



נראה שקיבלנו גרף קשיר בחוזקה.
G קשיר $\Leftarrow$ DFS נותן עץ אחד.
נסמן ב-z את השורש.

מספיק להראות שלכל $v \in V$ יש מסלולים
$v \rightsquigarrow z$ ו- $z \rightsquigarrow v$

($z \rightsquigarrow v$): ע"י קשתות עץ

($v \rightsquigarrow z$):

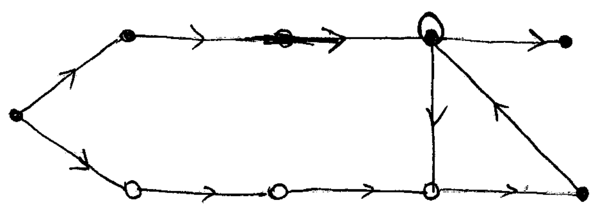
אם $z=v$ סיימנו
אחרת יהי u ההורה של v בעץ
(u,v) אינה גשר.
כלומר היא נמצאת על מעגל פשוט
ומכאן שקיימת קשת אחורית מ-v או מצאצא
של v ל-u או לאב הקדמון של u.

יש מסלול מכוון מ-v לקצה הקשת האחרונה.
להמשיך משם באותו אופן
עלינו לעלות רמה אחת למעלה, וכן,
אחרי מס' סופי של שלבים נגיע ל-z.

1.12.200

אלגוריתמים

תרגול



תרגיל:

נתון גרף מכוון $G=(V,E)$ ו- $Z\subseteq V$

רוצים לבדוק אם קיים מסלול, לאו דווקא פשוט,

שעובר דרך כל קודקודי Z.

פתרון

נניח תחילה ש- G אציקלי.

נמצא מיון טופולוגי ונסמן את קודקודי Z

ב- $v_1,\dots,v_k$ עפ"י סדר המיון הטופולוגי.

אם יש מסלול כנדרש, הוא יעבור דרך קודקודי Z

עפ"י סדר זה.

לכל $1\le i\le k-1$ נבדוק אם יש מסלול מ- v_i ל- v_{i+1}.

בכדי לבדוק זאת נריץ BFS מ- v_i

אבל רק על הקטע שבין v_i ל- v_{i+1} במיון הטופולוגי.

זמן ריצה

מיון טופולוגי $O(|E|+|V|)$

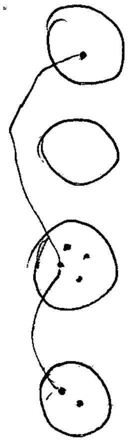
אח"כ ניגש לבחון כל קשת שמחברת בין

קטעים שונים.

כמו כן כל קשת נסרקת ב- BFS אחד.

וכל קודקוד מ- Z לכל היותר, לכן סה"כ זמן

הריצה לינארי.



אלגוריתם לגרף כללי

1. נמצא רקה"ח ואת גרף העל של הרקה"ח

$$G_{scc} = (V_{scc}, E_{scc})$$

נגדיר $Z' \subseteq V_{scc}$ להיות את הרכיבים שמכילים קודקודים של Z.

2. הגרף הזה אציקלי ולכן ניתן להפעיל עליו את האלגוריתם הקודם.

נכונות

בגרף הרכיבים יש מסלול מכל קודקוד לכל קודקוד רק אם יש מסלול שעובר דרך כל הרכיבים שמכילים קודקודים מ-Z, ניתן להרחיב אותו כך שיעבור דרך כל קודקודי Z בכל רכיב כזה.

תרגיל

יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון.
רוצים למצוא קבוצה מינימלית $Z \subseteq V$
כך שלכל $v \in V$ קיים $u \in Z$ כך שיש מסלול מ-u ל-v

פתרון

1. נמצא רקה"ח
2. לכל רכיב C שאין קשתות שנכנסות אליו מבחוץ נבחר ~~xxx~~ $u \in C$ כלשהו ונוסיף ל-Z

זמן ריצה

$$O(|E|+|V|)$$

נכונות

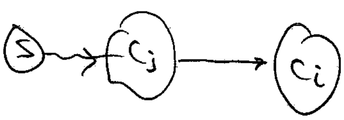
(1) נראה שלכל $v \in V$ קיים $u \in S$ כך שיש מסלול מ-u ל-v:

יהיו $C_1, C_2, \dots, C_k$ מיון טופולוגי של גרף הרכ.

נוכיח באינדוקציה על i, שהטענה מתקיימת לכל $v \in C_i$.

$i=1$: אין קשתות שנכנסות ל-C_1
לכן יש $u \in C_1$ כך ש-$u \in S$ וממנו
יש מסלול לכל קודקודי C_1

נניח שהטענה נכונה לכל $j<i$ ונוכיח עבור i:
אם אין קשתות שנכנסות ל-C_i - כמו עבור 1
אחרת קיים $j<i$ כך שיש קשת
מ-C_j ל-C_i.
לפי הנחת האינדוקציה יש מסלולים מ-S
לקודקודי C_j ולכן גם ל-C_i.



S מינימלי כי לרכיב שאין קשתות
שנכנסות אליו ניתן להגיע רק ממנו עצמו
ולכן חייבים לבחור קודקוד מכל רכיב כזה.

תרגיל

יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון וקשיר $w: E \to \mathbb{R}$
וכל קשת צבועה באדום או בכחול.
נרצה למצוא עפ"מ בעל מס' מקסימלי של קשתות אדומות.

פתרון

פתרון 1

נבחר $\varepsilon>0$ קטן ונגדיר משקל חדש ע"י

$$w'(e)=\begin{cases} w(e) & e \text{ כחולה} \\ w(e)-\varepsilon & e \text{ אדומה} \end{cases}$$

ונמצא עפ"מ לפי w' - T

ε כזה יהיה מספיק קטן כך ש:

(1) אם $w(e_1)<w(e_2)$ אזי גם $w'(e_1)<w'(e_2)$

(2) לכל 2 עצים פורשים T_1, T_2

אם $w(T_1)<w(T_2)$ אזי $w(T_1)<w(T_2)$.

נכונות

(א) T עפ"מ גם לפי w בגלל תנאי (2)

(ב)

$$w'(T)=w(T)-\varepsilon\cdot\left(\text{מס' הקשתות האדומות}\right)$$

ולכן מבין כל העפ"מים לפי w, הכי קל לפי w' זה מי שיש לו הכי הרבה ~~קשתות~~ קשתות אדומות.

פתרון 2

האלגוריתמים משתמשים במשקלים רק בהשוואות בין 2 קשתות. נשנה את ההשוואה:

נגיד ש- e_1 קלה מ- e_2 אם $w(e_1)<w(e_2)$

(או)

$w(e_1)=w(e_2)$ וגם e_1 אדומה, e_2 כחולה.

זמן הריצה של האלגוריתם לא השתנה

ב הפתרון שגוי?

8.12.2005

אלגוריתמים [illegible]

<u>משפט:</u> Kruskal יכול להחזיר כל עפ"מ,
כלומר, לכל עפ"מ T, קיים מיון של הקשתות,
עבורו Kruskal מחזיר את T

<u>הוכחה</u>

אם נשים את קשתות T בראש ואת השאר בסוף ונפעיל את האלגוריתם מהתרגול הקודם אז Kruskal יחזיר את T.
אבל הטענה משפיעה רק על הסדר בין קשתות באותו משקל במיון.
רק, לפי הטענה זהו מיון חוקי, ועבורו Kruskal מחזיר את T.

<u>משפט:</u>

יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון וקשיר $w:E\to\mathbb{R}$.
ו- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מונוטונית עולה ממש.

נגדיר: $\forall e\in E \quad w'(e)=f(w(e))$

אז T עפ"מ לפי w $\Leftrightarrow$ הוא עפ"מ לפי w'.

<u>הוכחה</u>

T עפ"מ לפי w $\Leftrightarrow$ קיים מיון עבורו Kruskal מחזיר T
$\Leftrightarrow$ T עפ"מ לפי w' (כי המיונים
לפי w ו- w' הם אותם מיונים)

<u>משפט:</u> יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון וקשיר $w:E\to\mathbb{R}$
ו- T_1, T_2 עפ"מים.

נסמן $a_1\le a_2\le\dots\le a_{|V|-1}$ את משקלי קשתות T_1
$b_1\le b_2\le\dots\le b_{|V|-1}$ את משקלי קשתות T_2
אזי לכל i: $a_i=b_i$

מסקנה: אם כל המשקלים שונים אז יש עפ"מ יחיד.

הוכחת הלמה:

נניח בשלילה שקיים i עבורו $a_i \neq b_i$

ויהי i האינדקס המינימלי עבורו זה מתקיים.

נניח בה"כ ש- $a_i > b_i$

נגדיר:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \le b_i \\ x+1 & x > b_i \end{cases}$$

ונגדיר $w'(e) = f(w(e))$

f עולה ממש לכן T_1 ו- T_2 עפ"מ אם לפי w'

$$w'(T_1) = a_1 + \dots + a_{i-1} + a_i + 1 + \dots + a_{|V|-1} + 1 =$$
$$= w(T_1) + |V| - i$$

$$w'(T_2) \le \underbrace{b_1 + \dots + b_i}_{\le b_i} + b_{i+1} + 1 + \dots + b_{|V|-1} + 1 =$$

$$= w(T_2) + |V| - i - 1$$

נקבל $w'(T_2) < w'(T_1)$ בסתירה לכך ששניהם עפ"מ. ∎

טענה: נניח גם כמו בטענה הקודמת

ו- T_1 עפ"מ ו- T_2 עץ פורש כלשהו.

נסמן את הקשתות כמו בטענה הקודמת.

אז לכל i: $a_i \le b_i$.

הוכחה:

נניח בשלילה שקיים i עבורו $a_i > b_i$ ויהי i

האינדקס המינימלי שמקיים זאת.

נגדיר:

$$K = w(T_2) - w(T_1) + 1 \qquad (K \geq 1)$$

ונגדיר:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \leq b_i \\ x + K & x > b_i \end{cases}$$

נמשיך כמו בסעיף הקודם ונקבל

$$w'(T_1) = w(T_1) + K(|V| - i)$$

$$w'(T_2) \leq w(T_2) + K(|V| - i - 1) =$$

$$= w(T_2) + K(|V| - i) - K =$$

$$= w(T_2) + K(|V| - i) - w(T_2) + w(T_1) - 1 =$$

$$= w'(T_1) - 1$$

בסתירה לכך ש-T_1 עפ"מ לפי w'.

תרגיל

יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון אציקלי, $w: E \to \mathbb{R}$, $s \in V$.

רוצים למצוא מק"ב מ-s.

ב-Dijkstra:

Relax(u,v) 

If $d[v] > d[u] + w(u,v)$

$d[v] \leftarrow d[u] + w(u,v)$

אלגוריתם

(1) נמצא מיון טופולוגי - $u_1, \dots, u_k, \underset{}{\overset{=v_0}{s}}, v_1, v_2, \dots, v_n$

(2) לכל $0 \leq i \leq n$ לפי הסדר נעשה Relax על הקשתות שיוצאות מ-v_i

(באתחול - $d[s] = 0$ $\quad \forall v \neq s \ \ d[v] = \infty$)

זמן ריצה

$$O(|E|+|V|)$$

נכונות

נראה באינדוקציה על i שכאשר מגיעים לטפל ב-v_i כבר מתקיים $d[v_i]=\delta(z,v_i)$.

$j=0$: מהאיתחול: $d[v_0]=0$

נניח נכונות הטענה לכל $j<i$ ונוכיח עבור i.
נסתכל על מסלול קצר ביותר מ-z ל-v_i
ונסמן ב-j את הקודקוד הלפני אחרון במסלול $(i>j)$

$$z \rightsquigarrow v_j \rightarrow v_i$$

לפי הנחת האינדוקציה ~~כשסיים~~ כשטיפלנו ב-v_j
כבר התקיים $d[v_j]=\delta(z,v_j)$ ובשלב זה עשינו $Relax(v_j,v_i)$
$\Leftarrow$ אחרי Relax זה מתקיים $d[v_i]=\delta(z,v_i)$

$\blacksquare$

15.12.2…

אלגוריתמים
תרגול

תרגיל:

נתון גרף מכוון $G=(V,E)$, $w: E\to\{0,1,2\}$, $s\in V$.

הצע למצוא מק"ב מ-s.

⊛ נריץ Dijkstra עם מימוש יותר יעיל של תור העדיפויות.

$d(v)$ הוא ~~מ'~~ אורך של מסלול פשוט מ-s ל-v

לכן ערכי d האפשריים הם $0,1,\ldots,2(|V|-1)$, ∞

⊛ נחזיק את תור העדיפויות כמערך עם

האינדקסים $0,1,2,\ldots,2|V|-1$ כאשר במקום ה-i

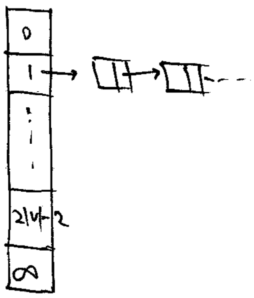
יהיה רשימה מקושרת של כל הקודקודים v עבורם $d(v)=i$

Dijkstra רגיל:

$$|V|\cdot \text{extract-min} + |E|\cdot \text{decrease-key}$$

$$O(|E|+|V|\log|V|)$$

Dijkstra בעזרת הנ"ל:



decrease-key - נמחק את הקודקוד מהרשימה שלו ונכניס לראש הרשימה של ה-d החדש. - $O(1)$

extract-min - נמצא את ה-i הראשון שעבורו הרשימה לא ריקה ונוציא את האיבר הראשון ברשימה.

המינימום לא קטן במהלך האלגוריתם ולכן בכל שלב נתחיל את החיפוש החל מהמינימום של השלב הקודם.

סה"כ - נעבור אחד על המערך - כל פעולות ה-extract-min ביחד יהיו $O(|V|)$

$\Leftarrow$ סה"כ זמן ריצה $O(|E|+|V|)$

ארביטרז'

	ש"ח	\$	€
	~~[illegible]~~	~~[illegible]~~	~~0.15~~
ש"ח	1	0.2	0.15
\$	4.5	1	2
€	7	0.5	1

נניח n סוגי מטבעות $c_1,\dots,c_n$

ושער המרה $A=(a_{ij})$

a_{ij} - כמה מטבעות מסוג c_j נקבל עבור מטבע אחד מסוג c_i

רוצים למצוא סדרת המרות שמביאה רווח. כלומר, סדרה $i_1,\dots,i_k$ כך שאם נתחיל ממטבע אחד מסוג c_{i_1} נמיר ל-c_{i_2}, ..., ל-c_{i_k} וחזרה ל-c_{i_1} נקבל יותר מ-1.

כלומר סדרה עבורה: $a_{i_1i_2}\cdot a_{i_2i_3}\cdot\ldots\cdot a_{i_ki_1}>1$

נעביר log: $\log(a_{i_1i_2})+\log(a_{i_2i_3})+\ldots+\log(a_{i_ki_1})>0$

$$-\log(a_{i_1i_2})-\log(a_{i_2i_3})-\ldots-\log(a_{i_ki_1})<0$$

נבנה גרף עם קודקודים $c_1,\dots,c_n$ ולכל $i\neq j$ יהיה קשת (c_i,c_j) במשקל $-\log(a_{ij})$

$\Leftarrow$ הפתרון הוא מעגל שלילי בגרף

נמצא מעגל שלילי ע"י Bellman-Ford מקודקוד כלשהו.

כלומר נשלוף מעגל, וכך אם יש מעגל שלילי נמצא אותו.

תרגיל:

נתונה מערכת אי-שוויונים במשתנים $x_1,\dots,x_n$

כל אי-שוויון הוא מהצורה $x_i - x_j \le c_{ij}$

רוצים לפתור את המערכת או להגיד שאין פתרון.

$x_1 - x_2 \le 9$

$x_3 - x_1 \le -10$

$x_4 - x_2 \le 2$

$x_5 - x_1 \le -1$

$x_2 - x_5 \le -15$

בדוגמה אם נחבר את אי-שוויונים 1,4,5 נקבל $0 \le -7$

$\Downarrow$

אין פתרון.

נבנה גרף מכוון בעל הקודקודים $x_1,\dots,x_n$

לכל אי-שוויון $x_i - x_j \le c_{ij}$ נגדיר קשת (x_j, x_i) במשקל c_{ij}.

נוסיף קודקוד s עם קשתות (s, x_i) במשקל 0 לכל $n \ge i \ge 1$.

נריץ Bellman-Ford מ-s.

טענה: יש פתרון למערכת $\Leftrightarrow$ אין בגרף מעגל שלילי.

הוכחה:

$(\Leftarrow)$ נניח בשלילה שיש בגרף מעגל שלילי $c: x_{i_1} \to x_{i_2} \to \dots \to x_{i_k}$

האי-שוויונים המתאימים:

$$x_{i_2} - x_{i_1} \le c_{i_2 i_1}$$
$$x_{i_3} - x_{i_2} \le c_{i_3 i_2}$$
$$\vdots$$
$$x_{i_1} - x_{i_k} \le c_{i_1 i_k}$$

$$0 \le w(c) < 0$$ סתירה

($\Rightarrow$) נניח שאין מעגל ~~שלי~~ שלילי

אז Bellman-Ford מצא לכל קודקוד את המרחק

מ-s $\delta(s,x_i)$ (כלומר נגיש מ-s)

נראה שהפתרון שנותן לכל x_i את הערך $\delta(s,x_i)$

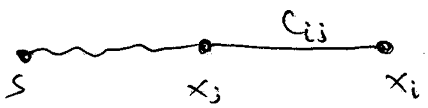
הוא הפתרון למערכת.

לכל אי-שוויון ~~נתון~~ $x_i - x_j \le c_{ij}$ נראה

שמתקיים:

$$\delta(s,x_i) - \delta(s,x_j) \le c_{ij} \iff \delta(s,x_i) \le \delta(s,x_j) + c_{ij}$$

וזה מתקיים לפי למה מהשיעור.



תרגיל:

22.12.2000

אלגוריתמים [illegible]

יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון, $w: E \to \mathbb{R}$

וכל קשת צבועה באדום או בכחול

נניח שאין ב-G מעגל שלילי.

לכל $u,v \in V$ רוצים למצוא מק"ב מ-u ל-v

מבין המסלולים שמכילים מס' זוגי של קשתות אדומות.

$$V = \{1,2,\ldots,n\}$$

פתרון א': שינוי של Floyd-Warshall

תזכורת: FW מחשב מטריצות $D^{(0)}, D^{(1)}, \ldots, D^{(n)}$

כאשר $D^{(k)} = (d_{ij}^{(k)})$

$$d_{ij}^{(k)} = \begin{cases} \text{אורך המק"ב מ-}i\text{ ל-}j\text{ שהקודקודים הפנימיים בו הם מתוך } \{1,\ldots,k\} \\ \infty \quad \text{אם אין מסלול כזה} \end{cases}$$

הפתרון $D^{(n)}$

אתחול:

$$D_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 0 & i=j \\ w(i,j) & (i,j)\in E \\ \infty & \text{אחרת} \end{cases}$$

ולכל $1 \le k \le n$

$$d_{ij}^{(k)} = \min\Big(\underbrace{d_{ij}^{(k-1)}}_{k \text{ לא במסלול}}, \underbrace{d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}}_{k \text{ כן במסלול}} \Big)$$

בכדי לפתור את הבעיה שלנו נחשב בכל שלב

2 מטריצות $O^{(k)}, E^{(k)}$ כאשר $E^{(k)} = (e_{ij}^{(k)})$

$$l_{ij}^{(n)} = \begin{cases} \text{אורך המק"ב מ-} i \text{ ל-} j \\ \text{שהקודקודים הפנימיים הם מתוך } \{1,\dots,n\} \\ \text{ושמכיל מס' זוגי של קשתות} \\ \text{אדומות. אם אין מסלול כזה } \infty \end{cases}$$

$O^{(n)}=(O_{ij}^{(n)})$ - כנ"ל רק עבור מס' אי-זוגי של קשתות אדומות

הפתרון: $E^{(n)}$

אתחול:

$$l_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 0 & i=j \\ w(i,j) & (i,j)\in E \text{ כחולה} \\ \infty & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$O_{ij}^{(0)} = \begin{cases} w(i,j) & (i,j)\in E \text{ אדומה} \\ \infty & \text{אחרת} \end{cases}$$

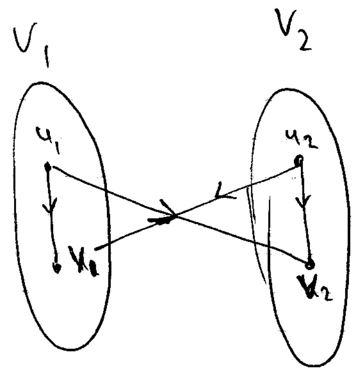
לכל $1\le k\le n$

$$l_{ij}^{(k)} = \min\left(l_{ij}^{(k-1)},\ l_{ik}^{(k-1)}+l_{kj}^{(k-1)},\ O_{ik}^{(k-1)}+O_{kj}^{(k-1)}\right)$$

$$O_{ij}^{(k)} = \min\left(O_{ij}^{(k-1)},\ l_{ik}^{(k-1)}+O_{kj}^{(k-1)},\ O_{ik}^{(k-1)}+l_{kj}^{(k-1)}\right)$$

זמן ריצה: $O(|V|^3)$

פתרון ב':



נשכפל את הקודקודים

לכל קודקוד $u\in V$ יהיו

2 קודקודים u_1 ו- u_2

לכל קשת כמו (u,v)

יהיו קשתות (u_1,v_1)

(u_2,v_2)

ולכל קשת אדומה יהיו (u_1,v_1) ו- (u_2,v_2).

נמצא מקב"ק בין כל הזוגות.

לכל $u,v\in V$ המסלול הנדרש הוא המקב"ק מ-u_1 ל-v_1

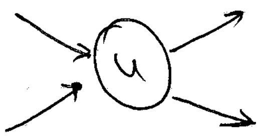
תרגיל:

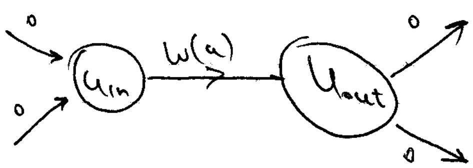
נתון גרף מכוון $G=(V,E)$ $w:V\to\mathbb{R}$

נגדיר אורך מסלול להיות סכום משקלי הקודקודים שלו

נניח שאין ב-G מעגל שלילי, רוצים למצוא

מקב"ק בין כל הזוגות.





נפצל כל קודקוד $u\in V$

ל-u_{in} ו- u_{out} עם

קשת (u_{in},u_{out}) במשקל

$w(u)$ ולכל קשת (u,v)

נהפוך לקשת.

ולכל קשת (u,v) נהפוך לקשת (u_{out},v_{in}) במשקל 0.

נמצא מקב"ק בין כל הזוגות.

לכל $u,v\in V$ מקב"ק מ-u ל-v בגרף המקורי הוא

מקב"ק מ-u_{in} ל-v_{out} בגרף החדש.

נכונות:

נראה שאם מסלול מ-u ל-v בגרף המקורי
יש מסלול מ-u_{in} ל-v_{out} בגרף החדש
באותו משקל ולהפך.

$$u_{in} \to u_{out} \to x_{in} \to x_{out} \Leftarrow u \to x \to \dots \to v$$

$$x_{out} \to \dots \to v_{out}$$

בכיוון ההפוך - כל מסלול בגרף החדש הוא
מהצורה הנ"ל (כי מכל y_{in} יש רק קשת
אחת ל-y_{out}, ומכל y_{out} רק קשתות ל-z_{in}
כאשר $(y,z)\in E$.
ולכן יש מסלול בגרף המקורי.

תרגיל:

נתון גרף מכוון $G=(V,E)$, $w:E\to\mathbb{R}$
נניח שאין ב-G מעגל שלילי ונרצה לבדוק
אם יש בו מעגל במשקל 0.

נוסיף קודקוד s עם קשתות (s,v) כולן במשקל 0
לכל $v\in V$ ונריץ Bellman-Ford מ-s
נשאיר רק את גרף כל המקצרים מ-s:
כל הקשתות $(u,v)\in E$ שמקיימות

$$\delta(s,v)=\delta(s,u)+w(u,v)$$

נסמן אותו ב-G'.
נבדוק אם יש מעגל ב-G' ע"י DFS
(יש מעגל $\Leftrightarrow$ יש ב-DFS לפחות קשת אחורית אחת)

נראה שמעגל ב-G מופיע ב-G'

$$\Longleftrightarrow$$

משקלו 0.

($\Leftarrow$) נניח $v_1 \to v_2 \to \dots \to v_k$ מעגל ב-G'

$$\delta(s,v_2) = \delta(s,v_1) + w(v_1,v_2)$$

$$+\quad \delta(s,v_3) = \delta(s,v_2) + w(v_2,v_3)$$

$$\vdots$$

$$\delta(s,v_1) = \delta(s,v_k) + w(v_k,v_1)$$

$$0 = w(v_1,v_2) + \dots w(v_k,v_1)$$

($\Rightarrow$) יהי $v_1 \to v_2 \to \dots \to v_k$ מעגל במשקל 0.

נניח בשלילה שהוא לא מופיע ב-G'.

נניח בה"כ שרק קשת (v_1,v_2) לא מופיעה ב-G'.

$$\delta(s,v_2) < \delta(s,v_1) + w(v_1,v_2)$$

$$+\quad \delta(s,v_3) \leq \delta(s,v_2) + w(v_2,v_3)$$

$$\vdots$$

$$\delta(s,v_1) \leq \delta(s,v_k) + w(v_k,v_1)$$

$$0 < w(v_1,v_2) + \dots + w(v_k,v_1)$$

בסתירה לכך שמשקל המעגל 0.

29.12.2005

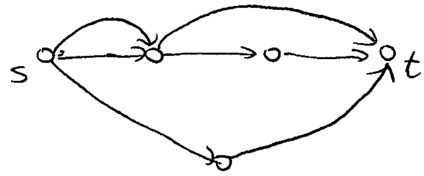
אלגוריתמים - תרגול

זרימה עם קיבולים שלמים.

ערך הזרימה המקסימלית שלם.

יש זרימה מקסימלית שבה על כל קשת זורם ערך שלם והאלג' שלמד ימצא זרימה כזו.

תרגיל: נתון גרף מכוון $G=(V,E)$ ושני קודקודים s,t רוצים למצוא את המס' המקסימלי של מסלולים זרים בקשתות מ-s ל-t.



ניתן לכל הקשתות קיבול 1 ונמצא זרימה מקסימלית.

נכונות: נסמן ב-k את המס' המקס' של המסלולים הזרים בקשתות מ-s ל-t ונוכיח כי $|f|=k$

(1) נזרים 1 על כל אחד מ-k המסלולים. הם זרים ולכן לא חרגנו מהקיבולים וקיבלנו זרימה עם ערך k. כלומר, $k\leq|f|$.

(2) נוכיח כי $|f|\leq k$: נוכיח באינדוקציה על הערך של $|f|$. נניח f זרימה בשלמים. נוכיח שיש $|f|$ מסלולים זרים שמורכבים מהקשתות שזורם דרכן 1.

$|f|=0$ - ברור.

נניח שהטענה נכונה עבור $|f|=l-1$ ונוכיח עבור l.

נמחק את כל הקשתות שזורם דרכן 0 - הזרימה לא השתנתה

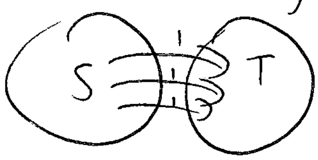
$|f|>0$ לכן יש מסלול מ-s ל-t. נבחר מסלול כזה ונמחק אותו. נשארנו עם זרימה $l-1$ ולפי הנחת האינדוקציה יש $l-1$ מסלולים זרים וביחד עם המסלול שמחקנו קיבלנו l מסלולים זרים.

משפט מנגר: (קשתות)

$G=(V,E)$ גרף מכוון. $s,t\in V$ המס' המקסימלי של מסלולים זרים בקשתות מ-s ל-t שווה k למס' המינימלי של קשתות שצריך למחוק כדי לנתק את t מ-s $=l$.

הוכחה: (1) $k\le l$ חייבים למחוק לפחות קשת אחת מכל אחד מהמסלולים הזרים.

(2) $k\ge l$: לפי התרגיל הקודם ערך הזרימה המקסימלית היא k ולפי Max Flow Min Cut קיבול החתך המינימלי הוא k כי הקיבולים 1. לכן יש בחתך הזה k קשתות מהקבו' S לקבו' T.

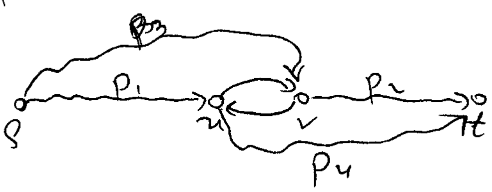


אם נמחק אותן ננתק את הקבו' T מ-S, ולכן גם את הקודקוד t מהקודק' s.

תרגיל: נתון גרף לא מכוון $G=(V,E)$ $s,t\in V$ רוצים למצוא את המס' המקסימלי של מסלולים זרים בקשתות מ-s ל-t.

פתרון: נהפוך כל קשת לזוג קשתות אנטי מק' ונפתור את הבעיה בגרף המכוון שנקבל.

בעיה - יתכן שעבור קשת $(u,v)\in E$ יהיה מסלול שמשתמש ב-(u,v) ומסלול שמשתמש ב-(v,u) ואז בגרף הלא מכוון המסלולים לא זרים.



מסלול 1: $p_1\,(u,v)\,p_2$

מסלול 2: $p_3\,(v,u)\,p_4$

ניתן להחליף אותם במסלולים p_1p_4 ו-p_3p_2 ואז לא נשתמש יותר בקשתות (u,v) ו-(v,u). כלומר, מס' המסלולים נותר זהה.

תרגיל: יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון, $s,t\in V$. רוצים למצוא את המס' של מסלולים זרים בקודקודים מ-s ל-t.

נפצל כל קודקוד u ל- u_{in}, u_{out}

כעת נותר למצוא רק מסלולים זרים בקשתות.
אם הגרף לא מכוון נהפוך תחילה כל קשת לשתי קשתות אנטי מקבילות ואז נפתור את הבעיה בגרף המכוון.

תזכורת: גרף נקרא דו-קשיר אם הוא קשיר ואין בו קודקודים מנתקים.

טענה: יהי $G=(V,E)$ גרף דו קשיר עם יותר מקשת אחת. אזי לכל שני קשתות $e_1,e_2\in E$ קיים מעגל פשוט שמכיל את e_1,e_2

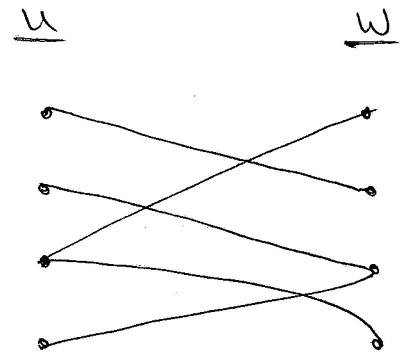
הוכחה: נוסיף קודקוד s ע"ג e_1 וקודקוד t ע"ג e_2
הגרף דו-קשיר $\Leftarrow$ אין קודקודים מנתקים. כלומר צריך למחוק לפחות 2 קודקודים כדי לנתק בין s ו-t. לכן, לפי משפט מנגר יש 2 מסלולים זרים בקודקודים בין s ו-t והם מהווים מעגל פשוט שמכיל את e_1,e_2.

05.01.20
אלגוריתמים
...גרפים

נתונים קבוצת נשים וקבוצת גברים
לכל אישה רשימה של הגברים איתם היא ~~...~~ מוכנה
להתחתן.
רוצים לחתן כמה שיותר זוגות.

פתרון

נבנה גרף דו-צדדי
$G=(U,W,E)$



U - נשים W - גברים
E - לפי הרשימות

הגדרה:
זיווג בגרף הוא קבוצת קשתות זרות
בקודקודים.

הבעיה שלנו
מציאת זיווג מקסימלי בגרף דו-צדדי

נכוון את כל הקשתות מ-U ל-W
נוסיף קודקוד z עם קשתות (z,u) לכל $u \in U$
וקודקוד t עם קשתות (w,t) לכל $w \in W$
נסמן את הגרף שהתקבל ב-$G'=(V',E')$
יש התאמה בין קשתות G למסלולים מ-z ל-t ב-G'
ובין הזיווגים ב-G וקבוצות של מסלולים זרים בקשתות
ב-G'.
ולכן צריך למצוא קבוצה מקסימלית של מסלולים זרים
בקשתות ע"י זרימה כפי שראינו.

הזיווג עצמו - כל הקשתות בין U ל-W שזרם עליהן 1.

נסמן $V = U \cup W$.

$$|V'| = |V| + 2$$
$$|E'| = |E| + |V|$$

ניתן להניח שאין ב-G קודקוד מבודד
(אחרת נזרוק אותו)

ולכן $|E| \geq \frac{1}{2}|V| \Rightarrow |E'| = O(|E|)$

E-K : $O(|V||E|^2)$

Dinic : $O(|V|^2|E|)$

FF: כאשר הקיבולים שלמים:

$$O(\text{ערך הזרימה המקסימלי} \cdot |E|) =$$
$$= O(\min(|U|,|W|) \cdot |E|) =$$
$$= O(|V| \cdot |E|)$$

הגדרה: זיווג שלם בגרף דו-צדדי $G = (U, W, E)$ הוא זיווג בגודל $\min(|U|,|W|)$

סימון: עבור קבוצת קודקודים A בגרף נסמן ב-$N(A)$ את קבוצת השכנים של קודקודי A

משפט Hall:

יהי $G = (U, W, E)$ ונניח $|U| \leq |W|$

יש זיווג שלם ב-G $\Leftrightarrow$ $|N(A)| \geq |A| \quad \forall A \subseteq U$

משפט Hall:

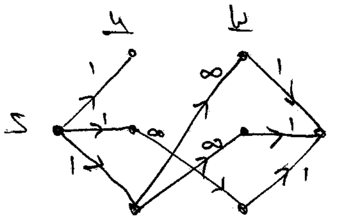
יהי $G=(U,W,E)$ ונניח $|U|\le|W|$

יש זיווג מלא ב-G $\Leftrightarrow$ $|N(A)|\ge|A|$ $\forall A\subseteq U$

הוכחה

($\Leftarrow$) נניח שיש זיווג מלא. אז לכל $A\subseteq U$
אם B הם הקודקודים שמזווגים ל-A
בזיווג אז $B\subseteq N(A)$, $|N(A)|\ge|B|=|A|$

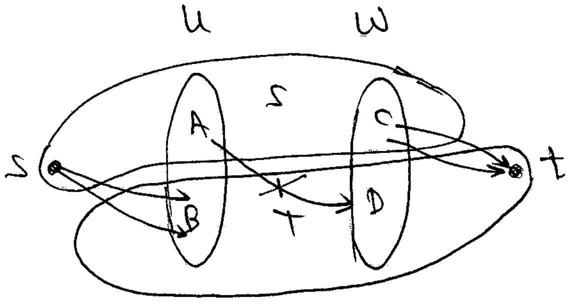
($\Rightarrow$) נניח (*) מתקיים ונניח בשלילה שגודל
הזיווג המקסימלי הוא $k<|U|$



נסתכל על רשת הזרימה שבנינו
אבל הקשתות מ-U ל-W יהיו בעלות
קיבול ∞. הזרימה לא משתנה
כי לכל קודקוד ב-U נכנס ≤ 1
לכן על כל קשת בין U ל-W
יזרום ≤ 1.

k = ערך הזרימה המקסימלית = קיבול החתך המינימלי.

נסתכל על חתך (S,T) מינימלי.



אין קשתות מ-A ל-D
(אחרת קיבול החתך היה ∞)
לכן קשתות החתך
הן מ-s ל-B ומ-C ל-t
לכולן קיבול 1 ולכן $k=|B|+|C|$

$N(A)\subseteq C$ (כי אין קשתות בין A ל-D)

$$|N(A)|\le|C|=k-|B|<|U|-|B|=|A|$$

בסתירה להנחה

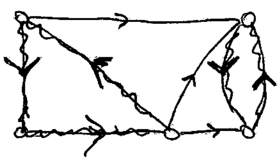
תרגיל:

נתון גרף מכוון $G=(V,E)$

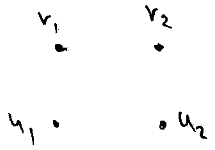
רוצים למצוא $F\subseteq E$ כך שבגרף (V,F)

לכל קודקוד יש דרגת כניסה 1 ודרגת יציאה 1

או להודיע שאין קבוצה כזאת.



נבנה גרף דו-צדדי $G'=(V_1,V_2,E')$



$V_1=\{v_1 \mid v\in V\}$ $\quad V_2=\{v_2 \mid v\in V\}$

לכל $(u,v)\in E$ תהיה קשת $(u_1,v_2)\in E'$

נמצא זיווג מקסימלי. אם הוא שלם - אז הקשתות המתאימות ב-G הן הפתרון.

אחרת - אין פתרון

מפני שקבוצת קשתות היא זיווג שלם

$\Longleftrightarrow$

הקשתות המתאימות ב-G מקיימות

את הדרוש

(הדרגות ב-V_1 מתאימות לדרגות היציאה

והדרגות ב-V_2 מתאימות לדרגות הכניסה.)

12.01.2008

אלגוריתמים
תרגול

שאלה 2 – תרגיל 5

$$d(e) \le f(e) \le c(e)$$

הזרימה על הקשת עצמה

כמו שהגדרנו בהגדרה של זרימה.

הגדרה:

גרף $G=(V,E)$ נקרא k קשיר בקשתות

אם לכל $u \neq v \in V$ יש k מסלולים זרים

בקשתות מ-u ל-v.

הגדרה שקולה:

אם צריך להסיר לפחות k קשתות כדי

לנתק את ~~הקשת~~ הקשירות (לפי מנגר)

(בגרף מכוון - קשירות חזקה)

תרגיל:

נתון גרף מכוון $G=(V,E)$ ומס' k.

רוצים לבדוק האם G k-קשיר בקשתות.

פתרון נאיבי:

לכל $u \neq v \in V$ נבדוק אם יש k מסלולים זרים

מ-u ל-v ע"י זרימה.

זמן ריצה

עבור u,v מסוימים:

(1) Dinic - רשת 0-1 $\quad O(|E| \cdot \min(|V|^{\frac{2}{3}}, \sqrt{|E|}))$

(2) FF - ונעצור ברגע שהזרימה $\ge k$ $\quad O(|E| \cdot k)$

(גם Dinic)

סה"כ: $O(|E| \cdot \min(|V|^{\frac{2}{3}}, \sqrt{|E|}, k))$

סה"כ זמן ריצה: $O(|V|^2|E|\cdot\min(|V|^{2/3},\sqrt{|E|},k))$

<u>אלגוריתם יותר יעיל:</u>

נבחר $v\in V$ באופן שרירותי

ונבדוק רק את הזוגות (u,v) ו-(v,u) לכל $u\in V$ $v\neq u$.

<u>זמן ריצה:</u> $O(|V||E|\min(|V|^{2/3},\sqrt{|E|},k))$

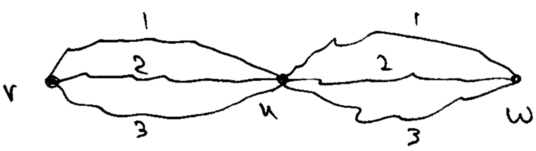
<u>נכונות</u>

נראה שאם לכל $u\neq v$ יש k ~~קשתות~~ מסלולים זרים בקשתות מ-u ל-v ומ-v ל-u

אזי לכל v $w\neq v$ יש k מסלולים זרים בקשתות מ-v ל-u.

נחבר מהמסלולים מ-v ל-u והמסלולים מ-u ל-w

~~נקבל~~ k מסלולים מ-v ל-w.



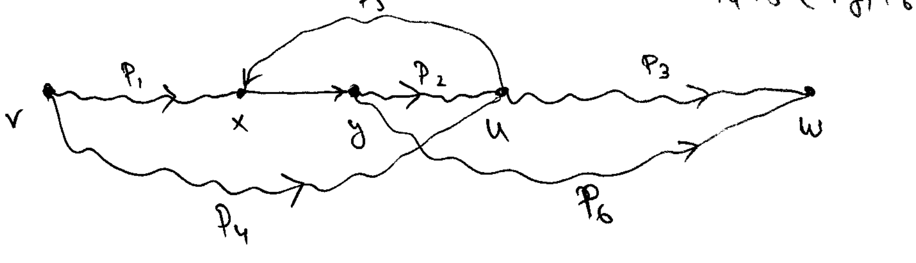
<u>הבעיה</u>

ייתכן שיש קשת משותפת למסלול מ-v ל-u

ולמסלול מ-u ל-w $\Rightarrow$ קיבלנו 2 מסלולים מ-v ל-w

שאינם זרים $P_1(x,y)P_2P_3$

$P_4P_5(x,y)P_6$



ניתן להחליף אותם ב- $P_1(x,y)P_6$

P_4P_3

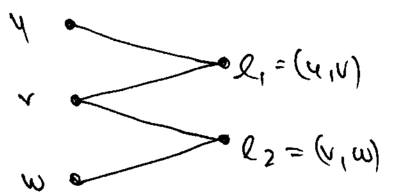
עם הקשת (x,y) מופיעה רק במסלול
אחד, ושאר הקשתות כבר הופיעו במסלולים,
כלומר לא יפרנו זוגות חדשות.
רק נוכל לעשות זאת לכל הקשתות
"הבעייתיות".

תרגיל

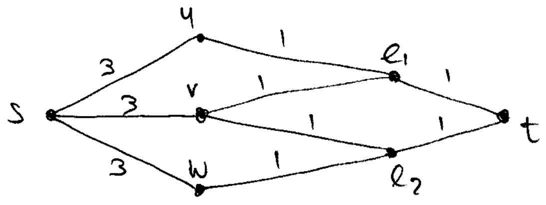
נתון גרף לא מכוון $G=(V,E)$
רוצים לכוון אותו כך שלכל קודקוד דרגת
יציאה ≥ 3 או להגיד שאי אפשר.

נבנה גרף דו-צדדי $H=(V,E,F)$

קודקוד לכל קשת של G.



כאשר לכל $e=(u,v)\in E$ יהיו ב-F
קשתות (u,e) ו-(v,e)



נכוון את כל קשתות F מ-V ל-E וניתן להן
קיבול 1. נוסיף קודקוד s עם קשתות (s,v)
בקיבול 3 לכל $v\in V$.
וקודקוד t עם קשתות (e,t) בקיבול 1 לכל $e\in E$.

נמצא זרימה מקסימלית.
נראה שיש פתרון $\Leftrightarrow$ ערך הזרימה המקסימלית $\boxed{|E|}$

$(\Leftarrow)$ נניח שיש פתרון. אז לכל $e=(u,v)$
אם כיוונו את e מ-u ל-v נזרים 1 על הקשת (u,e)
ואם מ-v ל-u נזרים 1 על הקשת (v,e)

נשלים זרימה לאורך מ-z ו-t $(z \to u \to e \to t)$

דרגת היציאה של כל קודקוד ≤ 3

ולכן כל קודקוד ~~משתתף~~ ב ≤ 3 מסלולי

זרימה כנ"ל, ולכן הזרימה על הקשת $(v,z) \leq 3$

מכיוון שכיוונו את כל הקשתות,

יזרום 1 על כל הקשתות (e,t)

וערך הזרימה יהיה $|E|$.

$(\Leftarrow)$ באופן דומה, אם ערך הזרימה המקסימלית

$|E|$ ניתן להגדיר כיוון של הקשתות

שמקיים את תנאי השאלה (כאשר ניקח

זרימה בערכים שלמים)

<u>זמן ריצה</u>

אם נשכפל כל קודקוד ב-V 3 פעמים

(כולל הקשתות שלו) נקבל רשת מטיפוס 2.

מס' הקודקודים: $O(|V|+|E|)$

מס' קשתות: $O(|V|+|E|)$

לכן: $O\left((|V|+|E|)\sqrt{|V|+|E|}\right)$

<u>ב. רגיל:</u> כמו קודם, אבל דרגת יציאה $\leq d$

<u>פתרון:</u> כמו קודם אבל הזרימה צריכה להיות $d|V|$

(לא מוצאים רק שכיוונו חלק מהקשתות

וכל דרגות היציאה d, את השאר נכוון

שרירותית)

19.01.2006

אלגוריתמים

רגול

KMP

נתון T , $|T|=n$, תבנית P , $|P|=m$

האלגוריתם מחשב:

- לכל $1 \le j \le m$ $\pi[j]$

$$\pi[j] = \max\{k<j \mid P_k \sqsupset P_j\}$$

סיפא

- לכל $0 \le i \le n$ $\sigma[i]$

$$\sigma[i] = \max\{j \mid P_j \sqsupset T_i\}$$

סיפא

<u>דוגמה:</u>

1. $P = ababc$

$\pi = 0\ 0\ 1\ 2\ 0$

2. $P = cabcababca$

$\pi = 0\ 1\ 2\ 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 1$

עבור מחרוזת T נסמן ב- T^R את המחרוזת ההפוכה. מחרוזת T נקראת פלינדרום אם $T^R = T$

<u>תרגיל:</u>

נתונה מחרוזת T $|T|=n$

רוצים למצוא את הרישה המקסימלית של T שהיא פלינדרום.

<u>דוגמה</u>

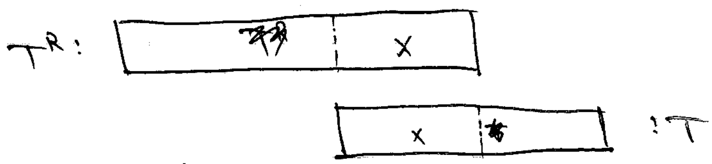
$T = abacabacbab$

לכל חלוקה $T=xy$ $T^R = y^R x^R$

רישה x פלינדרום $\Leftrightarrow$ $x = x^R$ $\Leftrightarrow$ $T = y^R x$ כלומר x סיפא של T^R

רק אנחנו מחפשים את הרישא המקסימלית של T
שהיא סיפא של T^R

לכן נריץ KMP עם הקלט T^R והתבנית T.
אורך הרישא שמחפשים הוא לפי ההגדרה $\sigma[n]$

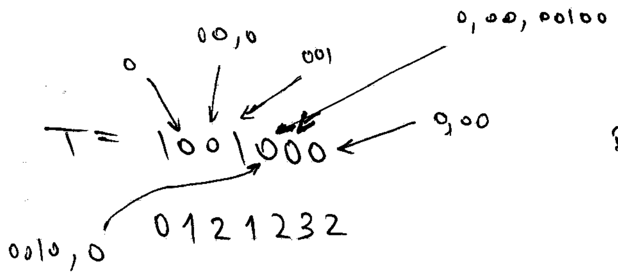


זמן ריצה: $O(n)$ $\left(|T^R| = |T| = n\right)$

תרגיל:

נתונים קלט T $|T|=n$ והתבנית P $|P|=m$
רוצים למצוא לכל i את מס' הרישות הלא ריקות
של P שהן סיפות של T_i [i התווים הראשונים של T]

דוגמה

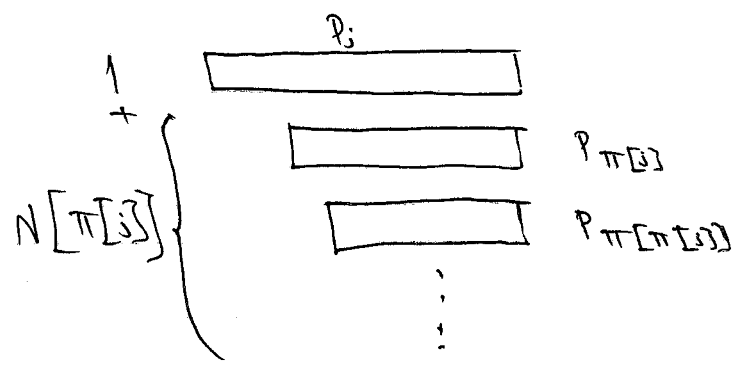


$P = 00100$

לכל מצב j נחשב את $N[j]$ -
מס' הרישות הלא ריקות של P שהן סיפות
של P_j

ואז לכל i, אם $\sigma[i]=j$ אז מס' הרישות
שמחפשים הוא $N[j]$

חישוב N:



אופן החישוב:

אתחול $N[0] = 0$

ולכל $1 \le j \le m$:

$$N[j] = 1 + N[\pi[j]]$$

p_j עצמו   השאר

<u>זמן ריצה</u>

חישוב N - $O(m)$

סה"כ - $O(n+m)$

<u>דוגמה</u>

$P = 0\ 0\ 1\ 0\ 0$

$\pi = 0\ 1\ 0\ 1\ 2$

$N = 0\ 1\ 2\ 1\ 2\ 3$

$1+N(0)$ $1+N(1)$ $1+N(2)$

<u>תרגיל:</u>

נתונה מחרוזת T $|T| = n \ge 10$

הציעו למצוא חלוקה $T = xyx$ $|y| \ge 10$

כך שהאורך של x מקסימלי מבין כל החלוקות הללו.

(תמיד יש כזאת - $x = \varepsilon$, $y = T$)

$|x| \le \lfloor \frac{n-10}{2} \rfloor$ $n \ge 10$ ובשאר x מופיע פעמיים

רק נריץ KMP עם Pref T ונבדוק $T_{\lfloor \frac{n-10}{2} \rfloor}$

הפיתרון $\sigma[n]$

כי $\sigma[n]$ היא אורך הרישא המקסימלית

של T ש- $\geq \lfloor \frac{n-10}{2} \rfloor$ והיא גם ~~סיפא~~ של T.

x - $\sigma[n]$ התווים הראשונים = $\sigma[n]$ התווים האחרונים.

y - מה שנשאר באמצע

זמן ריצה $O(n)$

<u>תרגיל:</u>

נתונה מחרוזת T, $|T|=n$

רוצים לבדוק אם קיימת חלוקה $T=xyx$

כך ש- ~~x~~y תת מחרוזת של x.

$$T= \overbrace{abacab}^{x}\overbrace{aca}^{y}\overbrace{abacab}^{x}$$

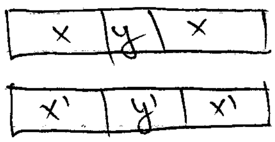
נמצא $T=xyx$ עבור $|x|$ מקסימלי.

כמו קודם, אבל הבנייה היא $T_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$

נבדוק האם y תת מחרוזת של x, (ע"י KMP).

אם כן, מצאנו חלוקה כנדרש

אם לא, נראה שאף חלוקה לא מקיימת את הדרוש:



נניח שקיימת חלוקה אחרת $T=x'y'x'$

שמקיימת $y' \subseteq x'$

(תת מחרוזת)

$y \subseteq y' \subseteq x' \subseteq x$

מקסימליות x (y מינימלי)   מקסימליות x

בסתירה להנחה ~~[illegible]~~ $y \not\subseteq x$.

~~זמן ריצה~~ <u>זמן ריצה:</u>

$O(n)$ (2 KMP עם מחרוזת באורך $\leq n$)

26.01.200

תאוריה

[illegible]

Multicommodity Flow

נתון גרף מכוון $G=(V,E)$; $C:E\to\mathbb{R}^+$

יש k סוגי סחורה שרוצים להעביר. לכל $1\le i\le k$

לסוג i מקור $s_i\in V$ בור $t_i\in V$ ודרישה d_i –

הכמות שרוצים להעביר.

רוצים לבדוק האם ניתן למלא את כל הדרישות

כלומר, לכל i להעביר זרימה בגודל d_i מ-s_i ל-t_i

נסמן ב-$f_i:E\to\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ את הזרימה של הסחורה מסוג i.

אז צריך להתקיים:

$$\forall e\in E \qquad \sum_{i=1}^{k} f_i(e) \le c(e)$$

<u>משתנים:</u> $\forall\, 1\le i\le k,\ (u,v)\in E \qquad f_i(u,v)$

<u>אין פונק' מטרה</u>, רק רוצים לבדוק אם יש פתרון פיסיבילי.

<u>אילוצים:</u>

$$\sum_{i=1}^{k} f_i(u,v) \le c(u,v) \qquad \forall (u,v)\in E$$

$$\sum_{v:(s_i,v)} f_i(s_i,v) - \sum_{v:(v,s_i)} f_i(v,s_i) = d_i$$ (הזרימה מ-s_i שווה ל d_i)

$$\sum_{v:(u,v)\in E} f_i(u,v) = \sum_{v:(v,u)\in E} f_i(v,u) \qquad \forall\, 1\le i\le k,\ u\in V\setminus\{s_i,t_i\}$$ (חוק השימור)

$$f_i(u,v)\ge 0 \qquad \forall\, 1\le i\le k \quad (u,v)\in E$$ (זרימה אי שלילית)

<u>תרגיל:</u>

נתון גרף מכוון $G=(V,E)$, $w:E\to\mathbb{R}$, $s\in V$

הנח שכל הקודקודים נגישים מ-s ושאין ב-G מעגל שלילי.

$$\max \sum_{v\in V} x_i \quad \text{such that} \quad x_s = 0$$

$$x_v - x_u \le w(u,v) \quad \forall (u,v)\in E$$

<u>טענה:</u>

הפתרון האופטימלי (שהוא יחיד) $x_v = \delta(s,v)$ $\forall v\in V$

<u>הוכחה</u>

(1) זה פתרון פיסיבילי כי $\delta(s,s)=0$

אי שוויון המשולש $\delta(s,v) - \delta(s,u) \le w(u,v)$ $\forall (u,v)\in E$

(2) נראה שכל פתרון פיסיבילי $x_v \le \delta(s,v)$ $\forall v\in V$

ולכן המקסימום מתקבל כשלכל v מתקיים שוויון.

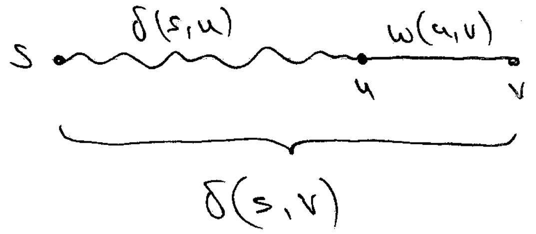
נוכיח באינדוקציה על i שלכל $v\in V$ כך שיש מסלול בין s ל-v שאורכו i קשתות מתקיים $x_v \le \delta(s,v)$.

$i=0$ $x_s = 0 = \delta(s,s)$

נניח שהטענה מתקיימת עבור i-1 ונוכיח עבור i

נניח $v\in V$ כך שיש מסלול מ-s ל-v שאורכו i קשתות

ויהי u קודקוד שלפני v במסלול לה.



$$x_v \underset{\text{הגבלה עבור }(u,v)}{\le} x_u + w(u,v) \underset{\text{הנחת האינדוקציה}}{\le} \delta(s,u) + w(u,v) = \delta(s,v)$$

Transportation

נתונים n מפעלים ו-m חנויות

במפעל ה-i יש מלאי של a_i לכל $1 \le i \le n$

החנות ה-j רוצה כמות b_j לכל $1 \le j \le m$

c_{ij} - מחיר הובלת כמות של 1

ממפעל i לחנות j, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$.

רוצים לספק את הדרישות של כל החנויות במחיר מינימלי.

<u>משתנים:</u> x_{ij} - הכמות שנעביר ממפעל i לחנות j.

<u>פונק'</u> $\min \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}$

<u>אילוצים:</u>

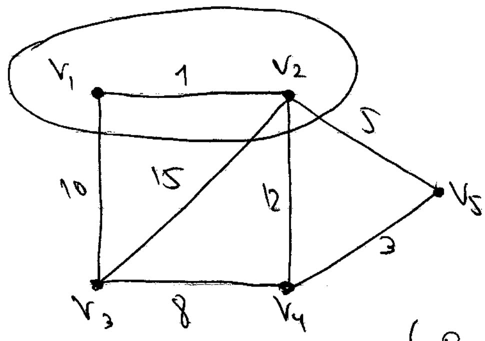
$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \le a_i \qquad 1 \le i \le n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \le b_j \qquad 1 \le j \le m$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad 1 \le j \le m, \ 1 \le i \le n$$

Max-Cut

42



נתון גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ו-$w: E \to R^+$.

רוצים למצוא חתך (חלוקה של V ל-2 קבוצות זרות A ו-B) במשקל מקסימלי (סכום משקלי הקשתות בין A ל-B)

<u>נראה אלגוריתם שנותן קירוב $\frac{1}{2}$:</u>

האלגוריתם greedy - נניח $V=\{v_1,\dots,v_n\}$

אתחול: $A=B=\emptyset$

לכל $1 \le i \le n$ אם $\sum_{v_j \in B} w(v_i,v_j) \ge \sum_{v_j \in A} w(v_i,v_j)$ נוסיף את v_i ל-A

ל-B

לפי האלגוריתם, לכל $n \geq i \geq 1$:

$$\sum_{\substack{j<i \\ (v_i,v_j) \\ \text{חוצה את} \\ \text{החתך}}} w(v_i,v_j) \geq \frac{1}{2} \sum_{\substack{j<i \\ (v_i,v_j)\in E}} w(v_i,v_j)$$

כי הוספנו את v_i

לצד שבו הוא תורם יותר לחתך.

$$\text{משקל החתך שקיבלנו} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j<i \\ (v_i,v_j) \\ \text{חוצה את} \\ \text{החתך}}} w(v_i,v_j) \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j<i \\ (v_i,v_j)\in E}} w(v_i,v_j)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{e\in E} w(e) \geq \frac{1}{2} \cdot \text{משקל החתך המקסימלי}$$

TSP - בעיית הסוכן הנוסע

02.02.2006

אלגוריתמים

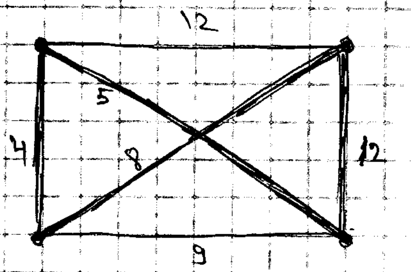
שיעור אחרון

קלט: גרף לא מכוון שלם $G=(V,E)$,

$$W: E \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

מטרה: למצוא מעגל פשוט שעובר דרך כל הקודקודים (מעגל המילטון) במשקל מינימלי.

דוגמה:



משקל המעגל: 19

הבעיה קשה וקשה אף לקרב אותה במקרה הכללי.

נניח ש-w מקיים את אי-שוויון המשולש

$$w(x,z) \le w(x,y) + w(y,z) \qquad \forall x,y,z \in V$$

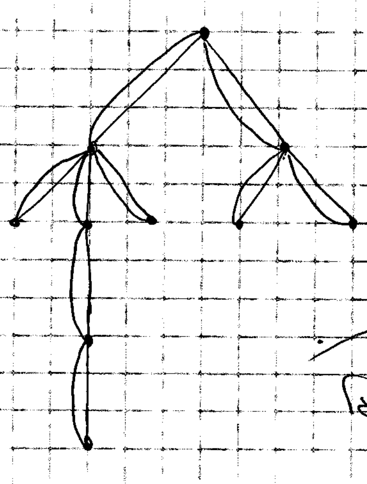
TSP עם אי-שוויון המשולש
(עדיין קשה, אך ניתן לקרב אותה)

אלגוריתם קירוב 2

(1) נמצא עפ"מ T

(2) נכפיל כל קשת של העץ עם המשקל שלה. נקבל מולטי גרף T'

ב-T' כל הדרגות זוגיות הוא מכיל מעגל אוילר, נמצא מעגל אוילר C



(3) $$w(C) \le w(C')$$

בגלל אי-שוויון המשולש, קיצורי הדרך יכולים רק להקטין את המעגל.

$$w(C) \le w(C') = 2w(T) \le 2w(C^*)$$