פתרון תרגיל מס' 6

1. (א) אם T קונסיסטנטית ו-$T \vdash_{HPC} A$ אז $T \cup \{A\}$ קונסיסטנטית.
הוכחה: תהיי T קונסיסטנטית ו-$T \vdash_{HPC} A$. אז קיימת נוסחא B $T \not\vdash_{HPC} B$.
נניח בשלילה ש-$T \cup \{A\}$ אינה קונ'. אז $T \cup \{A\} \vdash_{HPC} B$. מטרנזיטיביות $\vdash_{HPC}$, $T \vdash_{HPC} B$ בסתירה להנחה.

(ב) $T \vdash_{HPC} \neg A$ אמם $T \cup \{A\}$ אינה קונסיסטנטית.
הוכחה:
($\Leftarrow$): נניח $T \vdash_{HPC} \neg A$. ממונוטוניות $\vdash_{HPC}$,
$T \cup \{A\} \vdash_{HPC} \neg A$. כמו כן $T \cup \{A\} \vdash_{HPC} A$ ומלמה שהוכחנו בכיתה נובע $T \cup \{A\} \vdash_{HPC} B$ עבור כל B ולכן $T \cup \{A\}$ אינה קונסיסטנטית.
($\Rightarrow$): נניח $T \cup \{A\}$ אינה קונסיסטנטית. לכן $T \cup \{A\} \vdash_{HPC} \neg A$. הוכחה של $\neg A$ מתוך T ב-HPC:
$A \to A$ - למה מהרצאה
$A \to \neg A$ - נובע מ-$T \cup \{A\} \vdash_{HPC} \neg A$ לפי משפט הדדוקציה
$(A \to A) \to ((A \to \neg A) \to \neg A)$ - אקסיומה
$\neg A$ - פעמיים MP

2. נתונה קבוצה A כלשהי. נגדיר קבוצת פסוקים T_A ונוכיח שהיא ספיקה אמם A דו-קהילתית:

- הפסוקים האטומיים:
  - לכל $a, b \in A$ יהיה לנו פסוק אטומי q_{ab} כאשר הכוונה ש-q_{ab} יסתפק אמם a, b שכנים.
  - לכל $a \in A$ יהיו לנו פסוקים אטומיים p_a^1, p_a^2 כאשר הכוונה ש-p_a^i יסתפק אמם $a \in A_i$, $i \in \{1, 2\}$.
- $T_1 = \{q_{ab} \mid a, b \in A\ are\ neighbors\} \cup \{\neg q_{ab} \mid a, b \in A\ are\ not\ neighbors\}$
- $T_2 = \{p_a^1 \wedge p_b^1 \to q_{ab} \mid a, b \in A\}$ - הקבוצה נועדה להבטיח ש-A_1 תהיה קהילה.
- $T_3 = \{p_a^2 \wedge p_b^2 \to q_{ab} \mid a, b \in A\}$ - הקבוצה נועדה להבטיח ש-A_2 תהיה קהילה.
- $T_4 = \{p_a^1 \vee p_a^2 \mid a \in A\}$ - הקבוצה נועדה להבטיח ש-$A = A_1 \cup A_2$.
- $T_A = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4$.

<u>טענה:</u> A דו-קהלתית אמם T_A ספיקה.
הוכחה:
($\Leftarrow$) : נניח ש-A דו-קהלתית. אז קיימות שתי קהילות $A_1 \subseteq A, A_2 \subseteq A$ כך ש-$A = A_1 \cup A_2$.
נגדיר סביבה ρ שתספק את T_A בצורה הבאה. תהי ρ סביבה שלכל $a, b \in A$ מקיימת:

$$\rho(p_a^1) = t \Leftrightarrow a \in A_1$$

$$\rho(p_a^2) = t \Leftrightarrow a \in A_2$$

$$\rho(q_{ab}) = t \Leftrightarrow a, b \ are \ neighbors$$

נשאר להראות ש-$[\![T_A]\!]_\rho = t$. יהי $\psi \in T_A$. אז אחת האפשרויות מתקיימת:

(א) $\psi \in T_1$. אם $\psi = q_{ab}$ עבור $a, b \in A$ שכנים, אז לפי הגדרת ρ, $\rho(q_{ab}) = t$. אחרת $\psi = \neg q_{ab}$ עבור $a, b \in A$ שאינם שכנים. מכיוון ש-$\rho(q_{ab}) = f$, $\rho(\neg q_{ab}) = t$.

(ב) $\psi \in T_2$. אז $\psi = p_a^1 \wedge p_b^1 \rightarrow q_{ab}$ עבור $a, b \in A$ כלשהם. אם a, b אינם שכנים אז $\rho(q_{ab}) = f$. מכיוון ש-A_1 קהילה, לא ייתכן שגם a וגם b נמצאים בה. לכן $[\![p_a^1 \wedge p^1]\!]_\rho = f$ ולכן ρ מספקת את ψ. אחרת a, b שכנים ו-$\rho(q_{ab}) = t$. גם במקרה הזה ρ מספקת את ψ.

(ג) $\psi \in T_3$. הוכחה סימטרית למקרה הקודם.

(ד) $\psi \in T_4$. אז $\psi = p_a^1 \vee p_a^2$ עבור $a \in A$ כלשהו. מכיוון ש-$A = A_1 \cup A_2$, $a \in A_1$ או $a \in A_2$ ולכן $\rho(p_a^1) = t$ או $\rho(p_a^2) = t$. לכן ρ מספקת את ψ.

$(\Rightarrow)$:

נניח ש-T_A ספיקה. נוכיח ש-A היא דו-קהילתית.

תהי ρ סביבה שמספקת את T_A. נגדיר שתי תת-קבוצות A_1, A_2 של A באופן הבא:

$$A_i = \{a \in A \mid \rho(p_a^i) = t\}, \ i \in \{1, 2\}$$

יהי $a \in A$ כלשהו. מכיוון ש-$p_a^1 \vee p_a^2 \in T_A$, $[\![p_a^1 \vee p_a^2]\!]_\rho = t$. לכן $a \in A_1$ או $a \in A_2$.

יהיו $a, b \in A_1$. אז $\rho(p_a^1) = \rho(p_b^1) = t$. מכיוון ש-$p_a^1 \wedge p_b^1 \rightarrow q_{ab} \in T_A$, $[\![p_a^1 \wedge p_b^1 \rightarrow q_{ab}]\!]_\rho = t$ ולכן $\rho(q_{ab}) = t$. מכיוון שלכל $a', b' \in A$ שאינם שכנים $\neg q_{a'b'} \in T_A$ ולכן $\rho(q_{a'b'}) = f$ מתקבל ש-a, b בהכרח שכנים.

באופן סימטרי אפשר להראות שלכל $a, b \in A_2$: a, b הם שכנים.

הראינו ש-A דו-קהילתית.

כעת נוכיח את הטענה: A דו-קהילתית אמם כל תת-קבוצה סופית של A היא דו-קהילתית.

$(\Leftarrow)$:

נניח A קבוצה דו-קהילתית. נוכיח: כל תת-קבוצה סופית של A היא דו-קהילתית.

A דו-קהילתית $\Leftarrow$ T_A שבנינו למעלה היא ספיקה. לפי משפט הקומפקטיות, כל תת-קבוצה סופית של T_A היא ספיקה.

תהי A' תת-קבוצה סופית של A. נבנה את הקבוצה $T_{A'}$ באופן שהוסבר קודם. לפי הטענה שהוכחנו, A' דו-קהילתית אמם $T_{A'}$ ספיקה.

קל לראות (בדקו!) ש-$T_{A'}$ היא תת-קבוצה של T_A ושהינה סופית. לכן $T_{A'}$ ספי-קה. מכאן נובע ש-A' דו-קהילתית.

$(\Rightarrow)$:

נניח שכל תת-קבוצה של A היא דו-קהילתית. נוכיח ש-A היא דו-קהילתית.

תהי T_A קבוצת פסוקים שמוגדרת כמו מקודם. יש להראות שהיא ספיקה.
תהי T' תת-קבוצה סופית של T_A. נגדיר את הקבוצה A' באופן הבא:

$$A' = \{a \in A \mid p_a^2 \ or \ p_a^1 \ appears \ in \ some \ formula \ in \ T'\}$$

קל לראות (בדקו!) ש-A' היא תת-קבוצה סופית של A. מכאן שהיא דו-קהילתית.
אז קיימות שתי תת-קבוצות $A_1' \subseteq A', A_2' \subseteq A'$ שהן קהילות ו-$A_1' \cup A_2' = A'$.
תהי ρ סביבה המקיימת:
לכל $a, b \in A$: $\rho(q_{ab}) = t \Leftrightarrow a, b$ שכנים
לכל $a \in A'$: $\rho(p_a^1) = t \Leftrightarrow a \in A_1'$; $\rho(p_a^2) = t \Leftrightarrow a \in A_2'$

נראה ש-ρ מספקת את T': יהי $\psi \in T'$. מכיוון ש-$T' \subseteq T_A$, ייתכנו האפשרויות הבאות:

- $\psi = q_{ab}$ עבור $a, b \in A$ שכנים. לפי הגדרת ρ, $\rho(q_{ab}) = t$.
- $\psi = \neg q_{ab}$ עבור $a, b \in A$ שאינם שכנים. לפי הגדרת ρ, $\rho(q_{ab}) = f$ ולכן $[\![\neg q_{ab}]\!]_\rho = t$.
- $\psi = p_a^1 \wedge p_b^1 \rightarrow q_{ab}$ עבור $a, b \in A$. מכיוון ש-p_a^1, p_b^1 מופיעים ב-T', $a, b \in A'$. אם $a, b \in A_1'$, אז $\rho(p_a^1) = t, v(p_b^1) = t$ ולכן $v(p_a^1 \wedge p_b^1) = t$. מכיוון ש-$A_1'$ קהילה, a, b שכנים ולכן $\rho(q_{ab}) = t$. לכן $[\![\psi]\!]_\rho = t$.
אחרת $[\![p_a^1 \wedge p_b^1]\!]_\rho = f$ ו-$[\![\psi]\!]_\rho = t$.
- $\psi = p_a^2 \wedge p_b^2 \rightarrow q_{ab}$ עבור $a, b \in A$. באופן סימטרי לסעיף הקודם.
- $\psi = p_a^1 \vee p_a^2$ עבור $a \in A$. מכיוון ש-p_a^1 מופיע ב-T', $a \in A'$. מכיוון ש-A' דו-קהילתית, $a \in A_1'$ או $a \in A_2'$. לפי הגדרת ρ, $[\![p_a^1 \vee p_a^2]\!] = t$.

הראינו שכל תת-קבוצה סופית של T_A ספיקה. לפי משפט הקומפקטיות, T_A ספיקה. לפי טענה שהוכחנו קודם לכן, T_A ספיקה אמם A דו-קהילתית.