לוגיקה למדעי המחשב - תרגיל מס' 8

1. הוכח או הפרך: אם אין ב-Γ משתנים חופשיים, אז $\Gamma \models_{valid} \psi$ אמ"ם $\Gamma \models_{truth} \psi$.

2. תהי Γ קבוצת נוסחאות ו-ψ נוסחה כך ש-$Fv(\Gamma) \cup Fv(\psi) = \{x_1, ..., x_n\}$. יהיו $c_1, ..., c_n$ קבועים שונים שאינם מופיעים ב-Γ או ψ. הוכח: $\Gamma \models_{true} \psi$ אמ"ם $\Gamma\{\frac{c_1}{x_1}, ..., \frac{c_n}{x_n}\} \models_{true} \psi\{\frac{c_1}{x_1}, ..., \frac{c_n}{x_n}\}$. כיצד תשתנה תשובתך אם ידוע שהקבועים לא בהכרח שונים זה מזה?

3. מצא צורה פרנקסית נורמלית עבור הנוסחאות הבאות:

   (א) $(\forall x(P(x) \land \exists y Q(x,y)) \land \forall x(\neg P(x) \lor \neg \exists y Q(x,y)))$

   (ב) $\forall x(\forall y \exists z R(x,y,z)) \to \forall x P(x)$

   (ג) $\forall x \exists y \forall z((\forall x P(x)) \lor R(x, f(y), z) \land \neg \forall z \exists x \neg R(g(x,z), z))$

4. לכל פסוק A מצא פסוק אוניברסלי שספיק אמ"ם A ספיק:

   (א) $(\forall x(P(x) \to \exists y Q(x,y)) \land \forall x(\neg P(x) \to \neg \exists y Q(x,y)))$

   (ב) $\forall x(\forall y \exists z P(x,y,z)) \to \forall x R(x)$

   (ג) $\forall x \exists y \forall z(((\forall x P(x)) \to Q(x, f(y), z)) \land \neg \forall z \exists x \neg R(g(x,z), z))$

   (ד) $\forall z \forall x \exists y \, [P(f(x), y, z) \to [(\exists v \, Q(v,x)) \lor P(h(y), z, x)]]$

5. (שאלה ממבחן) מבנה M_1 עבור מילון Σ הוא תת-מבנה של מבנה M_2 עבור Σ אם:

   - $D_1^{M_1} \subseteq D^{M_2}$.
   - לכל קבוע c ב-Σ: $c^{M_1} = c^{M_2}$.
   - לכל סימן פונקציה n-מקומי f ב-Σ ו-$a_1, ..., a_n \in D^{M_1}$: $f^{M_1}(a_1, ..., a_n) = f^{M_2}(a_1, ..., a_n)$.
   - לכל סימן יחס n-מקומי R ב-Σ ו-$a_1, ..., a_n \in D^{M_1}$: $R^{M_1}(a_1, ..., a_n) = t$ אמ"ם $R^{M_1}(a_1, ..., a_n) = t$.

   יהי M_1 תת-מבנה של M_2. הוכח או הפרך:

   (א) אם פסוק נכון ב-M_1, אז הוא נכון גם ב-M_2.

   (ב) אם פסוק $(\exists x \exists y \psi(x,y) \to \forall x \forall y \varphi(x,y))$ נכון ב-M_2, אז הוא נכון ב-M_1.

   (ג) אם פסוק נכון ב-M_1 ו-M_2 הוא מבנה הרברנד, אז הפסוק נכון גם ב-M_2.