

לוגיקה למדעי המחשב - תרגיל מס' 7

1. יהי Σ מילון הכולל שני סימני יחס דו-מקומיים e, l , שני סימני פונקציה דו-מקומיים f_1, f_2 וקבוע c_0 .

יהי M מבנה עבור Σ שתחמו המספרים הטבעיים, e^M הוא יחס השויון, l^M הוא יחס $<$, f_1^M - פונקציית החיבור, f_2^M - פונקציית הכפל, ו- $c_0^M = 0$. לכל נוסחה A מהסעיפים הבאים הגדר (אם הדבר אפשרי) סביבות ρ_1, ρ_2 כך ש- $\llbracket A \rrbracket_{\rho_1}^M = t$ ו- $\llbracket A \rrbracket_{\rho_2}^M = f$.

$$\forall y(e(f_2(x, y), z)) \quad (\text{א})$$

$$e(c_0, f_1(x, y)) \quad (\text{ב})$$

$$l(c_0, f_1(x, y)) \quad (\text{ג})$$

$$\exists y(\exists z(\neg e(c_0, z) \wedge e(f_2(z, z), z) \wedge e(x, f_2(y, z)))) \quad (\text{ד})$$

2. יהי M מבנה עבור מילון Σ ו- ρ_1, ρ_2 שתי סביבות המסכימות על כל המשתנים החופשיים של נוסחה A . הוכח: $\llbracket A \rrbracket_{\rho_1}^M = \llbracket A \rrbracket_{\rho_2}^M$. (השתמש בטענה דומה עבור שמות עצם שהוכחה בתרגול).

3. קבע האם הנוסחאות הבאות תקפות לוגית. הוכח או תן דוגמא נגדית.

$$\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (\exists x A \rightarrow \exists x B) \quad (\text{א})$$

$$\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (\forall x A \rightarrow \forall x B) \quad (\text{ב})$$

$$(\exists x A \wedge \exists x B) \rightarrow \exists x(A \wedge B) \quad (\text{ג})$$

$$x \notin FV(A), \forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall x B) \quad (\text{ד})$$

$$x \notin FV(A), \forall x(A \vee B) \rightarrow (A \vee \forall x B) \quad (\text{ה})$$

$$(\forall x \exists y A) \rightarrow (\exists y \forall x A) \quad (\text{ו})$$

$$(\forall x A) \rightarrow (\exists x A) \quad (\text{ז})$$

$$(\exists x A) \rightarrow (\forall x A) \quad (\text{ח})$$

$$(\exists x(A \vee B)) \rightarrow (\exists x A \vee \exists x B) \quad (\text{ט})$$

$$(\neg \exists x A) \rightarrow (\forall x \neg A) \quad (\text{י})$$

$$(\forall x \neg A) \rightarrow (\neg \exists x A) \quad (\text{כ})$$

4. הוכח שאם x אינו חופשי ב- A אז לכל מבנה M וסביבה ρ מתקיים:

$$\llbracket (\forall x(B \rightarrow A)) \rightarrow (\exists x B \rightarrow A) \rrbracket_{\rho}^M = t$$

5. הוכח או הפרד: אם אין ב- Γ משתנים חופשיים, אז $\Gamma \models_{valid} \psi$ אם ורק אם $\Gamma \models_{truth} \psi$.