לוגיקה למדעי המחשב - תרגיל חזרה (שאלות ממבחנים)

1. נגדיר מערכת הוכחה חדשה S עבור תחשיב הפסוקים בעל נוסחאות מעל הקשר-ים
$\{\neg, \rightarrow\}$.
האקסיומות:
   - $(\neg p)$ לכל משתנה p.
   - $(p \rightarrow q)$ לכל שני משתנים p, q.
   - $(A \rightarrow A)$ לכל נוסחה A.

   כלל ההיסק:
$$\frac{A \quad B}{(\neg A \rightarrow B)}$$
הוכח או הפרך: אם A הוא משפט של S אז A אינו סתירה.

2. הוכח שלא קיים פסוק במילון $\Sigma = \{E(,)\}$ (כאשר E - סימן יחס דו-מקומי) שספיק בגרף G אמ"ם אין ב-G מעגל שאורכו מספר זוגי או מספר ראשוני.

3. בהינתן קבוצת פסוקים Σ בתחשיב הפסוקים, $Sat(\Sigma)$ היא קבוצת כל הסביבות המספקות את Σ. נאמר ש-Σ מגדירה קבוצת סביבות V אם $V = Sat(\Sigma)$. נאמר שקבוצת סביבות V היא גדירה אם קיימת קבוצת פסוקים Σ המגדירה אותה.
   (א) הוכח או הפרך: קבוצת הסביבות הריקה היא גדירה.
   (ב) הוכח או הפרך: קבוצת כל הסביבות היא גדירה.
   (ג) הוכח או הפרך: אם Σ_1, Σ_2 מגדירות קבוצות סביבות K_1, K_2 בהתאמה, אז הקבוצה $\{A \vee B \mid A \in \Sigma_1, B \in \Sigma_2\}$ מגדירה את $K_1 \cup K_2$.
   (ד) הוכח או הפרך: אם Σ_1, Σ_2 מגדירות קבוצות סביבות K_1, K_2 בהתאמה, אז הקבוצה $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ מגדירה את $K_1 \cap K_2$.

4. נוסיף לשפת תחשיב הפסוקים קשר חדש חד-מקומי $\Box$. המערכת $S4$ מתקבלת מ-HPC על ידי הוספת הדברים הבאים (לאקסיומות וכללי היסק הקיימים ב-HPC)

(א) אקסיומות נוספות:

- $(\mathbf{K}):\ \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$
- $(\mathbf{T}):\ \Box A \to A$
- $(\mathbf{4}):\ \Box A \to \Box\Box A$

(ב) כלל היסק נוסף:

$$\frac{A}{\Box A}\ \mathbf{NEC}$$

הוכח את משפט הדדוקציה המוחלש הבא עבור $S4$:

$$\Gamma \vdash_{S4} \Box A \to B \text{ אמ"ם } \Gamma, A \vdash_{S4} B$$

5. נתונים שני מילונים $\Sigma_1 = \{P(), f()\}$ (כאשר P הוא סימן יחס חד-מקומי ו-f סימן פונקציה חד-מקומי) ו-$\Sigma_2 = \{P_0(), P_1(), ..., \}$ (כלומר יש ב-Σ_2 סימן יחס חד-מקומי P_i לכל i טבעי).
נסמן ב-$f^n(x)$ את שם העצם $f(f(...f(x)...)$ שבו f מופעל n פעמים על x.
נגדיר תרגום Tr מנוסחאות ב-Σ_1 לנוסחאות ב-Σ_2 באופן הבא:

- $Tr(P(f^n(x))) = P_n(x)$
- $Tr(\neg A) = \neg Tr(A)$
- $Tr(A \circ B) = Tr(A) \circ Tr(B)$ עבור $\circ \in \{\wedge, \vee, \to\}$.
- $Tr(QxA) = QxTr(A)$ עבור $Q \in \{\forall, \exists\}$.

הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

(א) אם A היא נוסחה ספיקה אז $Tr(A)$ היא נוסחה ספיקה.

(ב) אם $Tr(A)$ היא נוסחה ספיקה אז A היא נוסחה ספיקה.