

משפט החלפת אקוילנטים:

אם $T \vdash_{FOL}^v A \leftrightarrow A'$ ו- φ' התקבלה מ- φ ע"י החלפת מופע אחד או יותר של A ב- A' אז $T \vdash_{FOL}^v \varphi \leftrightarrow \varphi'$
 הוכחה - באינדוקציה על מבנה φ , כתרגיל.

הערה: המשפט אינו נכון עבור t -נביעה. לדוגמא, $(x = x) \leftrightarrow (x = 1) \vdash_{FOL}^t (x = x) \leftrightarrow (x = 1)$
 אבל $(x = x) \leftrightarrow (x = 1) \not\vdash_{FOL}^t \forall x (x = x) \leftrightarrow \forall x (x = 1)$

שקילויות חשובות:

$$\neg \forall x A \equiv \exists x \neg A \quad \neg \exists x A \equiv \forall x \neg A \quad \exists x A \equiv \neg \forall x \neg A \quad \forall x A \equiv \neg \exists x \neg A \quad (1)$$

$$\forall x \forall y A \equiv \forall y \forall x A \quad \exists x \exists y A \equiv \exists y \exists x A \quad (2)$$

$$\forall y A \equiv A \quad \exists y A \equiv A \quad :A \text{ אינו חופשי ב-} A \quad (3)$$

(4) אם x אינו חופשי ב- A אך חופשי להצבה במקום y ב- A (כלל α):

$$\forall y A \equiv \forall x A(x/y) \quad \exists y A \equiv \exists x A(x/y)$$

$$\forall x (A \wedge B) \equiv \forall x A \wedge \forall x B \quad \exists x (A \vee B) \equiv \exists x A \vee \exists x B \quad (5)$$

(6) אם x אינו חופשי ב- A אז:

$$\exists x (A \wedge B) \equiv A \wedge \exists x B \quad \forall x (A \wedge B) \equiv A \wedge \forall x B \quad (i)$$

$$\exists x (A \vee B) \equiv A \vee \exists x B \quad \forall x (A \vee B) \equiv A \vee \forall x B \quad (ii)$$

$$\exists x (A \rightarrow B) \equiv A \rightarrow \exists x B \quad \forall x (A \rightarrow B) \equiv A \rightarrow \forall x B \quad (iii)$$

$$\exists x (B \rightarrow A) \equiv (\forall x B) \rightarrow A \quad \forall x (B \rightarrow A) \equiv (\exists x B) \rightarrow A \quad (iv)$$

דוגמא: אם p, q סימני יחס חד-מקומיים, אז:

$$\forall x (q(x) \wedge \neg \forall x.p(x)) \equiv \forall x (q(x) \wedge \exists x.\neg p(x)) \equiv (y \neq x) \\ \forall x (q(x) \wedge \exists y.\neg p(y)) \equiv \forall x \exists y.q(x) \wedge \neg p(y)$$

הערה: בדוגמא זו ניתן להגיע גם ל- $\exists y \forall x.q(x) \wedge \neg p(y)$ בדרך אחרת.