לוגיקה מסדר ראשון עם שויון

תזכורת מהרצאה:
שפה מסדר ראשון עם שויון היא שפה שהסיגנטורה שלה כוללת סימן יחס בינארי $=$ שמוכרז כשוויון.
מודל נורמאלי עבור תורה בשפה מסדר ראשון עם שויון הוא מבנה $M =< D, I >$ שבו $I[=]$ הוא יחס הזהות, כלומר:

$$I[=] = \{< a, a > \ | a \in D\}$$

בהינתן שפה L מסדר ראשון עם שויון, $Eq(L)$ - קבוצת אקסיומות השויון של L מוגדרת באופן הבא:

1. $\forall x(x = x)$
2. $\forall x \forall y(x = y) \to (y = x)$
3. $\forall x \forall y \forall z(((x = y) \wedge (y = z)) \to (x = z))$
4. לכל סימן פונקציה n-מקומי f ב-L:
$\forall x_1 ... \forall x_n \forall y_1 ... \forall y_n(x_1 = y_1 \wedge ... \wedge x_n = y_n \to f(x_1, ..., x_n) = f(y_1, ..., y_n))$
5. לכל סימן יחס n-מקומי p ב-L:
$\forall x_1 ... \forall x_n \forall y_1 ... \forall y_n(x_1 = y_1 \wedge ... \wedge x_n = y_n \to (p(x_1, ..., x_n) \to p(y_1, ..., y_n)))$

תרגיל 1: הוכח או הפרך: כל מודל של $Eq(L)$ הוא נורמאלי.

הטענה לא נכונה, נקח למשל את המבנה $M =< D, I >$ בשפה L עם שויון (וללא סימני פונקציה ויחס נוספים), כאשר $D = \{1, 2\}$, ו-$I[=] = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 1)\}$. המבנה הוא מודל של $Eq(L)$, אבל היחס $I[=]$ אינו יחס הזהות.

תרגיל 2: הוכח: תהי L שפה ו-M מודל של $Eq(L)$ ו-v השמה ב-M. אז קיים מודל נורמאלי M' המקיים: לכל השמה v ב-M קיימת השמה v' ב-M' כך שלכל נוסחא A:

$$M, v \models A \Leftrightarrow M', v' \models A$$

הוכחה:

נגדיר יחס $\sim$ על D:

$$a \sim b \Leftrightarrow < a, b > \in I[=]$$

מכיוון ש-M מודל של $Eq(L)$, קל לראות ש-$\sim$ הוא יחס קונגרואנציה (וכמובן גם יחס שקילות).
נסמן ב-$[\![a]\!]$ את מחלקת השקילות של a לפי $\sim$ (מה שסימנו $ec[a]$ בהרצאה). כלומר, $[\![a]\!] = \{b \in D \mid b \sim a\}$
יהי $M' =< D', I' >$, כאשר $D' = \{[\![a]\!] \mid a \in D\}$.
I' מוגדרת באופן הבא עבור סימני פונקציה, יחס וקבועים של L - לכל $a_1, ..., a_n \in D$:

$$< [\![a_1]\!], ...[\![a_n]\!] > \in I'[p] \Leftrightarrow < a_1, ..., a_n > \in I[p]$$

$$I'[f][[\![a_1]\!], ..., [\![a_n]\!]] = [\![I[f][a_1, ..., a_n]]\!]$$

$$I'[c] = [\![I[c]]\!]$$

יש לוודא שהגדרה זו אינה תלויה בבחירת הנציגים, וזה מובטח מכיוון ש-M מודל של האקסיומות 4 ו-5.

בהינתן השמה v במבנה M, נגדיר השמה v' ב-M' באופן הבא:

$$v'[x] = [\![v[x]]\!]$$

<u>טענה 1</u>: לכל שם עצם t מתקיים $v'[t] = [\![v[t]]\!]$. הוכחה - באינדוקציה על מבנה t:

- $t = x$.
  הטענה מתקיימת לפי הגדרת v'.
- $t = c$.
  $v'[c] = I'[c] = [\![I[c]]\!] = [\![v[c]]\!]$.
- $t = f(t_1, ..., t_n)$.
  $v'[f(t_1, ..., t_n)] = I'[f][v'[t_1], ..., v'[t_n]]$. לפי הנחת האינדוקציה, $v'[t_i] = [\![v[t_i]]\!]$.
  לכן

$$v'[f(t_1, ..., t_n)] = I'[f][[\![v[t_1]]\!], ..., [\![v[t_n]]\!]] = [\![I[f][v[t_1], ..., v[t_n]]]\!] = [\![v[f(t_1, ..., t_n)]]\!]$$

<u>טענה 2</u>: לכל נוסחא A מתקיים $M, v \models A \Leftrightarrow M', v' \models A$. הוכחה - באינדוקציה על מבנה A:

- $A = p(t_1, ..., t_n)$.

$$M, v \models p(t_1, ..., t_n) \Leftrightarrow < v[t_1], ..., v[t_n] > \in I[p] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow^* < [\![v[t_1]]\!], ..., [\![v[t_n]]\!] > \in I'[p] \Leftrightarrow^{**} < v'[t_1], ..., v'[t_n] > \in I'[p] \Leftrightarrow M', v' \models p(t_1, ..., t_n)$$

$*$ - לפי הגדרת I'
$**$ - לפי טענה 1.

- $A = B \wedge C$.
  $M, v \models B \wedge C \Leftrightarrow M, v \models B$ וגם $M, v \models C \Leftrightarrow$
  לפי הנחת האינדוקציה: $M', v' \models B$ וגם $M', v' \models C \Leftrightarrow M', v' \models B \wedge C$.
- $A = B \rightarrow C, A = \neg B, A = B \vee C$ - השלימו לבד.

- $A = \forall xB$.
תחילה נוכיח טענה: יהי $a \in D$,

$$v(a/x)' = v'(\llbracket a \rrbracket/x)$$

תזכורת: בהינתן השמה v ב-M, v' היא השמה ב-M' המוגדרת: $v'[y] = \llbracket v[y] \rrbracket$
הוכחה:

$$v(a/x)'[y] = \llbracket v(a/x)[y] \rrbracket = \{ \begin{array}{cc} \llbracket v[y] \rrbracket & y \neq x \\ \llbracket a \rrbracket & y = x \end{array}$$

$$v'(\llbracket a \rrbracket/x)[y] = \{ \begin{array}{cc} v'[y] = \llbracket v[y] \rrbracket & y \neq x \\ \llbracket a \rrbracket & y = x \end{array}$$

$$M, v \models \forall xB \Leftrightarrow \forall a \in D : \ M, v(a/x) \models B \Leftrightarrow^{*} \forall a \in D : \ M', v(a/x)' \models B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow^{**} \forall a \in D : \ M', v'(\llbracket a \rrbracket/x) \models B \Leftrightarrow \forall b \in D' : \ M', v'(b/x) \models B \Leftrightarrow M', v' \models \forall xA$$

$*$ - לפי הנחת האינדוקציה
$**$ - לפי טענה שהוכחנו קודם

- $A = \exists xB$ - השלימו לבד.

כעת נותר רק לוודא שהמבנה M' שהצענו הוא נורמאלי, כלומר $I'[=]$ הוא יחס הזהות:

$$< \llbracket a \rrbracket, \llbracket b \rrbracket > \in I'[=] \Leftrightarrow < a, b > \in I[=] \Leftrightarrow \llbracket a \rrbracket = \llbracket b \rrbracket$$

<u>מסקנה</u>: לכל מבנה M שהינו מודל של $Eq(L)$, קיים מבנה נורמאלי M' כך ש-$\overline{M \models A \Leftrightarrow M' \models A}$ - תרגיל בית, שימו לב שיש כיוון אחד לא טריויאלי!
מסקנות חשובות נוספות - ראו הרצאה.