לוגיקה למדעי המחשב - תרגול מס' 8

תחשיב הפרדיקטים - סמנטיקה

הסבר אינטואיטיבי:
תהיי L שפה מסדר ראשון כך שסימן יחס בינארי R^2 נמצא בסיגנטורה שלה. נסתכל על הנוסחא $\forall x(\forall y(R(x,y) \to \neg R(y,x)))$. האם נוסחא זו צריכה לקבל ערך אמת t בסמנטיקה שנגדיר?
התשובה היא שזה תלוי איך אנחנו רוצים לפרש את סימן היחס R^2 וגם מהם העצמים בעולם שאנו דנים בו. (אחר כך נראה שיש נוסחאות שנכונות בכל מודל ובכל השמה, אלה הן הנוסחאות התקפות לוגית).
נסתכל על כמה אפשרויות שונות:

1. עולם: המספרים הטבעיים, כאשר נפרש את R כיחס הסדר $<$. המובן האינטואי-טיבי של הנוסחא: לכל x, y טבעיים, אם מתקיים $x < y$ אז לא מתקיים $y < x$. בתנאים כאלה אנו מעוניינים שהנוסחא תקבל ערך t.
2. עולם: המספרים הטבעיים, כאשר נפרש את R כיחס הסדר $\leq$. המובן האינטואי-טיבי של הנוסחא: לכל x, y טבעיים, אם מתקיים $x \leq y$ אז לא מתקיים $y \leq x$. כמובן שבמקרה הזה הנוסחא אינה נכונה, כי ייתכן מצב שבו $y = x$.
3. עולם: תת קבוצות של המספרים הטבעיים. הפירוש של R: היחס $\subseteq$. גם הפעם הנוסחא אינה נכונה כי ייתכן מצב שבו x, y הם אותה קבוצה.
4. עולם: צמתים בגרף לא מכוון נתון. הפירוש של R: $R(x,y)$ אמם קיימת קשת מ-x ל-y. המובן האינטואיטיבי של הנוסחא: לכל שני צמתים x, y, אם קיימת קשת מ-x ל-y אז לא קיימת קשת מ-y ל-x. טענה זו אינה נכונה והיינו רוצים שבמצב זה, הנוסחא תקבל ערך f.

הגדרה פורמאלית של סמנטיקה:
תהי L שפה מסדר ראשון בעלת סיגנטורה σ. מבנה עבור L הינו זוג סדור $M = < D, I >$ כאשר D קבוצה לא ריקה של עצמים (העולם או הדומיין של המבנה) ו-I פונקציית אינטרפרטציה המוגדרת על σ והמקיימת:

- $I[c] \in D$
- $I[R^n] \subseteq D^n$
- $I[f^n] : D^n \to D$

מהו המבנה עבור כל אחת מהדוגמאות שראינו קודם?

מבנה לא תמיד מספיק בשביל לקבוע את ערך האמת של הנוסחא. נסתכל על שפה שהסיגנטורה שלה מורכבת מסימן יחס בינארי R וקבוע c. נבחר את המבנה הבא: $M = < N, I >$ כאשר $I[R] = \leq, I[c] = 3$. האם הנוסחא $R(x,c)$ נכונה במבנה זה?

תהי L שפה ו-$M =< D, I >$ מבנה עבורה. השמה $v : VAR \to D$ היא פונקציה המתאימה לכל משתנה עצם בעולם. בהינתן השמה v, x-ואריאנט של v היא כל השמה ששונה מ-v לכל היותר בערך שהיא נותנת למשתנה x.
למשל בדוגמא שראינו: בהינתן המבנה שלעיל, תחת כל השמה שמתאימה ל-x מספר טבעי שקטן או שווה ל-3, הנוסחא צריכה להסתפק.

בהינתן מבנה M עבור שפה L, השמה v מורחבת ל-$\overline{v} : TERMS \to D$, פונקציה מכל שמות העצם בשפה לדומיין באופן הבא:

- $\overline{v}[x] = v[x]$
- $\overline{v}[c] = I[c]$
- $\overline{v}[f(t_1, ..., t_n)] = I[f][\overline{v}[t_1], ..., \overline{v}[t_n]]$

מעתה לשם פשטות נרשום v במקום $\overline{v}$.

תרגיל 1: הוכח את משפט ההחלפה עבור שמות עצם: יהיו t, s_1, s_2 שמות עצם כלשהם ו-x משתנה. אז לכל השמה v המקיימת $v[s_1] = v[s_2]$: $v[t\{s_1/x\}] = v[t\{s_2/x\}]$.
הוכחה: באינדוקציה על מבנה t. תהיי v השמה המקיימת $v[s_1] = v[s_2]$.

- $t = y \neq x$ או $t = c$. אז $t\{s_1/x\} = t\{s_2/x\} = t$ ולכן $v[t\{s_1/x\}] = v[t\{s_2/x\}]$.
- $t = x$. אז $t\{s_1/x\} = s_1, t\{s_2/x\} = s_2$ ולכן $v[t\{s_1/x\}v[s_1] = v[s_2] = v[t\{s_2/x\}]$.
- $t = f(t_1, ..., t_n)$.

$$f(t_1, ..., t_n)\{s_1/x\} = f(t_1\{s_1/x\}, ..., t_n\{s_1/x\})$$

$$f(t_1, ..., t_n)\{s_2/x\} = f(t_1\{s_2/x\}, ..., t_n\{s_2/x\})$$

$$v[f(t_1, ..., t_n)\{s_1/x\}] = v[f(t_1\{s_1/x\}, ..., t_n\{s_1/x\})] = I(f)[v[t_1\{s_1/x\}], ..., v[t_n\{s_1/x\}]]$$

לפי הנחת האינדוקציה, $v[t_i\{s_1/x\}] = v[t_i\{s_2/x\}]$ עבור $1 \leq i \leq n$. לכן

$$I(f)[v[t_1\{s_1/x\}], ..., v[t_n\{s_1/x\}]] = I(f)[v[t_1\{s_2/x\}], ..., v[t_n\{s_2/x\}]] =$$

$$= v[f(t_1\{s_2/x\}, ..., t_n\{s_2/x\})] = v[f(t_1, ..., t_n)\{s_2/x\}]$$

בהינתן מבנה $M =< D, I >$ והשמה v, יחס הסיפוק $\models$ מוגדר באופן הבא:

- $M, v \models p(t_1, ..., t_n)$ אמם $< v[t_1], ...v[t_n] >\in I[p]$

- $M,v\models\neg A$ אמם $M,v\not\models A$
- $M,v\models A\wedge B$ אמם $M,v\models A$ וגם $M,v\models B$
- $M,v\models A\vee B$ אמם $M,v\models A$ או $M,v\models B$
- $M,v\models A\to B$ אמם $M,v\models B$ או $M,v\not\models A$
- $M,v\models\forall xA$ אמם לכל x-ואריאנט v' של v, $M,v'\models A$
- $M,v\models\exists xA$ אמם קיים x-ואריאנט v' של v כך ש-$M,v'\models A$

נוסחא A תקפה במבנה M ($M\models A$) אם לכל השמה v, $M,v\models A$.
נוסחא A תקפה לוגית אם היא תקפה בכל מבנה M.

תרגיל 2: עבור הנוסחאות הבאות, קבע האם הן תקפות לוגית.

- $\exists x(P(x)\to\forall xP(x))$. המובן האינטואיטיבי של הנוסחא: תמיד קיים יחיד המעיד על הכלל. נוכיח שהנוסחא תקפה לוגית:
  יהיו M,v מבנה והשמה כלשהם.
  אם $M,v\models\forall xP(x)$, אז $M,v\models P(x)\to\forall xP(x)$. כמו כן, מכיוון שקיים x-ואריאנט v' של v כך ש-$M,v'\models P(x)\to\forall xP(x)$ (במקרה הזה $v'=v$), מתקיים $M,v\models\exists x(P(x)\to\forall xP(x))$.
  אחרת $M,v\not\models\forall xP(x)$. אז קיים x-ואריאנט v' של v כך ש-$M,v'\not\models P(x)$. אבל אז $M,v'\models P(x)\to\forall xP(x)$ ולכן $M,v\models\exists x(P(x)\to\forall xP(x))$.

- $B=\forall x(P(x)\vee Q(x))\to(\forall xP(x))\vee(\forall xQ(x))$.
  מספיק לתת דוגמא אחת של מבנה שבו הנוסחא אינה תקפה. למשל:
  $M=<N,I>$ כאשר $n\in I[P]$ אמם n מספר זוגי, $n\in I[Q]$ אמם n מספר אי זוגי.

תרגיל 3: הוכח שאם x אינו חופשי ב-A אז לכל מבנה M והשמה v מתקיים:

$$M,v\models(\forall x(A\to B))\to(A\to\forall xB)$$

נניח בשלילה שקיים מבנה M והשמה v כך ש-$M,v\not\models\forall x(A\to B)\to(A\to\forall xB)$.
אז $M,v\models\forall x(A\to B)$ ו-$M,v\not\models A\to\forall xB$.
לכן $M,v\models A$ ו-$M,v\not\models\forall xB$. אז קיים x-ואריאנט v' של v כך ש-$M,v'\not\models B$.
מכיוון ש-$x\notin FV(A)$ ו-$M,v\models A$, $M,v'\models A$. לכן $M,v'\not\models A\to B$.
לכן $M,v\not\models\forall x(A\to B)$, בסתירה להנחה.

1. הזוג (M,v) הוא T-מודל של נוסחא A אם $M,v\models A$.
2. הזוג (M,v) הוא T-מודל של תורה T אם לכל $A\in T$ (M,v) הוא T-מודל של A.

3. M הוא <u>V-מודל</u> של נוסחא A אם $M \models A$.
4. M הוא <u>V-מודל</u> של תורה T אם לכל $A \in T$ M הוא V-מודל של A.
5. יחס T-נביעה: $T \vdash^t_{FOL} A$ אם כל T-מודל של T הוא גם T-מודל של A.
6. יחס V-נביעה: $T \vdash^v_{FOL} A$ אם כל V-מודל של T הוא גם V-מודל של A.

<u>תרגיל 4</u>: הוכח: $T \cup \{A\} \vdash^t_{FOL} B \Leftrightarrow T \vdash^t_{FOL} A \to B$.

($\Leftarrow$): נניח ש-$T \cup \{A\} \vdash^t_{FOL} B$. יהי (M,v) T-מודל של T. אם (M,v) אינו T-מודל של A, אז הוא T-מודל של $A \to B$.
אחרת (M,v) הוא T-מודל של A ומכיוון שהוא T-מודל של T, הוא גם T-מודל של $T \cup \{A\}$. מכיוון ש-$T \cup \{A\} \vdash^t_{FOL} B$, (M,v) הוא T-מודל של B ולכן הוא גם T-מודל של $A \to B$.
($\Rightarrow$): נניח ש-$T \vdash^t_{FOL} A \to B$. יהי (M,v) T-מודל של $T \cup \{A\}$. אז (M,v) T-מודל של T ושל A. מכך ש-(M,v) T-מודל של T וגם $T \vdash^t_{FOL} A \to B$ נובע ש-(M,v) T-מודל של $A \to B$. מכך ש-(M,v) T-מודל של $A \to B$ וגם T-מודל של A נובע ש-(M,v) T-מודל של B.

האם מתקיים גם $T \cup \{A\} \vdash^v_{FOL} B \Leftrightarrow T \vdash^v_{FOL} A \to B$? הסבר.