# לוגיקה למדעי המחשב - תרגול מס' 7

## תחשיב הפרדיקטים - סינטקס

תחשיב הפסוקים היה הכלי הבסיסי שהכרנו לתיאור היסקים תקפים. הבעיה היא שכוח הביטוי של תחשיב הפסוקים חלש מדי לתיאור כל סוגי ההיסקים. נסתכל לדוגמא על ההיסק הבא:

יוסי הוא סטודנט. כל סטודנט הוא אדם. לכן יוסי הוא אדם.

איך היינו מבטאים את ההיסק הזה בתחשיב הפסוקים?

p - יוסי הוא סטודנט

q - כל סטודנט הוא אדם

r - יוסי הוא אדם

$$p \wedge q \vdash_{CPL} r \ \Leftrightarrow \vdash_{CPL} p \wedge q \rightarrow r$$

אבל הפסוק שקיבלנו אינו טאוטולוגיה! הבעיה היא שתחשיב הפסוקים מפרש את הטענה כל $x$ הוא $y$ כיחידה אטומית אחת ולא יכול להסתכל פנימה על המבנה של הטענה.

אנחנו מעוניינים בשפה פורמלית שתהיה מסוגלת לטפל במקרים האלה.

בתחשיב הפרדיקטים אנחנו מפרקים את הטענות האטומיות של תחשיב הפסוקים לשני מרכיבים עיקריים: עצמים והתכונות המיוחסות להם. למשל בדוגמא שלנו יוסי הוא עצם, סטודנט ואדם הם תכונות - יחסים או פרדיקטים.

<u>הגדרה פורמאלית של שפה מסדר ראשון:</u>

<u>אוסף האותיות של השפה:</u>

1. סימנים לוגיים - משותפים לכל השפות. הן כוללות:
   - סימני פיסוק: $(\ )\ ,\ ;$
   - קשרים: $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$
   - כמתים: $\exists, \forall$
   - רשימה בת מניה של משתנים: $v_0, v_1, ...$
2. הקטגוריות הדקדוקיות - משותפות לכל השפות. הן כוללות:
   - שמות עצם
   - נוסחאות
3. סיגנטורות - סימנים שמיוחדים לכל שפה מסדר ראשון. יש 3 סוגים של סימנים כאלה:
   - קבוצה לא ריקה של סימני יחס: $p_1^i, p_2^j, ...p_n^k$.

- קבוצה (ייתכן ריקה) של קבועים: $c_0, c_1, ..., c_m$.
- קבוצה (ייתכן ריקה) של סימני פונקציה: $f_1^{i'}, f_2^{j'}, ..., f_p^{k'}$.

## המילים של השפה:

- אוסף שמות העצם:
  - כל משתנה הוא שם עצם.
  - כל קבוע הוא שם עצם.
  - לכל $t_1, ..., t_n$ שמות עצם ו-$f_n^k$ סימן פונקציה n-מקומי, $f_n^k(t_1, ..., t_n)$ הוא שם עצם.
- אוסף הנוסחאות:
  - לכל סימן יחס $p_n^k$ n-מקומי ו-$t_1, ..., t_n$ שמות עצם, $p_n^k(t_1, ..., t_n)$ נוסחא (אטומית).
  - אם $\varphi, \psi$ נוסחאות אז לכל $\{\rightarrow, \wedge, \vee\} \in \circ$, $(\varphi \circ \psi)$ נוסחא ו-$(\neg\psi)$ נוסחא.
  - אם $\psi$ נוסחא ו-$x$ משתנה, אז $\forall x\psi, \exists x\psi$ נוסחאות.

## דוגמאות של סיגנטורות:

1. שפה $L_1$:

- סימני יחס: $mother^2, father^2, parent^2, grandparent^2, student^1$
- קבועים: $Yossi, Moshe$

דוגמאות של הצרנה:

(א) $student(Yossi) \wedge father(Yossi, Moshe)$

(ב) $\forall x(\exists y(mother(x, y)))$

(ג) $\forall x(\forall y(mother(x, y) \vee father(x, y) \rightarrow parent(x, y)))$

(ד) $\forall x(\forall y(\forall z(parent(x, y) \wedge (parent(y, z) \rightarrow grandparent(x, z)))))$

2. תורת הקבוצות:

- סימני יחס: $\in^2, =^2, \subseteq^2$
- קבועים: $\emptyset$
- סימני פונקציה: $\cup^2, \cap^2$

דוגמאות של הצרנה:

(א) $\exists y(y \in x)$ - $x$ הוא לא הקבוצה הריקה

(ב) $\forall x(\emptyset \subseteq x)$ - הקבוצה הריקה מוכלת בכל קבוצה

(ג) $\forall X(\forall Y(\forall z(z \in X \rightarrow x \in Y) \wedge \forall z(z \in Y \rightarrow z \in X) \rightarrow (X = Y)))$ - מה התיאור המילולי של טענה זו?

3. הגיאומטריה האויקלידית:

- סימני יחס: $line^2, point^2, =^2, on^2, between^3, \approx^4$

דוגמאות של הצרנה:

- $point(x) \wedge line(y) \wedge on(x,y)$ - הנקודה $x$ נמצאת על הישר $y$.
- $\forall x(\forall y(\forall l(\forall m(point(x) \wedge line(l) \wedge point(y) \wedge line(m) \wedge on(x,l) \wedge on(y,m) \wedge on(y,l) \wedge on(x,m) \wedge \neg(l=m) \rightarrow (x=y)))))$
  - מה התיאור המילולי של הטענה הזו?

קבוצת המשתנים החופשיים של שמות עצם ונוסחאות:
בהינתן שם עצם $t$, קבוצת המשתנים החופשיים של $t$ מוגדרת כך:

- $FV(x) = \{x\}$
- $FV(c) = \emptyset$
- $FV(f(t_1, ..., t_n)) = FV(t_1) \cup ... \cup FV(t_n)$

בהינתן נוסחא A, קבוצת המשתנים החופשיים של A מוגדרת כך:

- $FV(p(t_1, ..., t_n)) = FV(t_1) \cup ... \cup FV(t_n)$
- $FV(\neg B) = FV(B)$
- $FV(B \circ C) = FV(B) \cup FV(C)$
- $FV(\forall xB) = FV(B) - \{x\}$
- $FV(\exists xB) = FV(B) - \{x\}$

אם $FV(t) = \emptyset$ אז $t$ הוא שם עצם סגור. אם $FV(A) = \emptyset$ אז $A$ היא פסוק.

משתנה שנמצא בטווח של כמת הוא משתנה קשור.

דוגמאות - מהם המשתנים הקשורים והחופשיים בנוסחאות ושמות העצם הבאים:

1. $f(g(x), c_0)$
2. $\forall x(p(x,y) \rightarrow \exists y(r(\ y)))$
3. $\exists x(t(x,y,z) \rightarrow \forall yq(\mathbf{x},y))$

נגדיר הצבה של שם עצם במקום משתנה חופשי:
יהיו $t$ ו-$s$ שמות עצם. התוצאה של הצבה של $t$ במקום משתנה $x$ ב-$s$ מסומנת $s[t/x]$ ומוגדרת כך:

- $y[t/x] = \begin{cases} y & x \neq y \text{ אם} \\ t & \text{אחרת} \end{cases}$

- $c[t/x] = c$
- $f(t_1, ..., t_n) = f(t_1[t/x], ..., t_n[t/x])$

בהינתן נוסחא A, התוצאה של הצבה של $t$ במקום משתנה $x$ ב-A מסומנת $A[t/x]$ ומוגדרת כך:

- $p(t_1, ..., t_n) = p(t_1[t/x], ..., t_n[t/x])$
- $(\neg B)[t/x] = \neg(B[t/x])$
- $(B \circ C)[t/x] = B[t/x] \circ C[t/x]$
- $(\forall yB)[t/x] = \{$ $\forall y(B[t/x])$ אם $x{\neq}y$, $\forall yB$ אחרת
- $(\exists yB)[t/x] = \{$ $\exists y(B[t/x])$ אם $x{\neq}y$, $\exists yB$ אחרת

<u>דוגמא:</u> מהו $A[t/x]$ במקרים הבאים:

1. $A = \forall x(p(x) \to q(x, f(y)))$, $t = g(y)$.
2. $A = (p(x) \to \forall x(q(x, f(y))))$, $t = g(y)$
3. $A = \forall y(p(y, x) \land \forall xq(x))$, $t = g(y)$ - עוד מעט נראה שהצבה כזו לא רצויה במקרים מסוימים...

<u>תרגיל:</u> תהי $A$ נוסחא ו-$s$ שם עצם כך ש-$x{\notin}FV(A)$, $x{\notin}FV(s)$.
הוכח שלכל שם עצם $t$, $A[t/x] = A$ ו-$s[t/x] = s$.
נוכיח תחילה עבור $s$ - באינדוקציה על מבנה $s$:

1. $s = y$. מכיוון ש-$x{\notin}FV(s)$, $y{\neq}x$. לכן $y[t/x] = y$.
2. $s = c$. אז $c[t/x] = c$.
3. $s = f(t_1, ..., t_n)$. אז $f(t_1, ..., t_n)[t/x] = f(t_1[t/x], ..., t_n[t/x])$. מכיוון ש-$FV(f(t_1, ..., t_n)) = FV(t_1) \cup ... \cup FV(t_n)$ ו-$x{\notin}FV(s)$, $x{\notin}FV(t_i)$ לכל $1 \leq i \leq n$. לפי הנחת האינדוקציה $t_i[t/x] = t_i$ לכל $1 \leq i \leq n$. לכן $f(t_1, ..., t_n)[t/x] = f(t_1, ..., t_n)$.

כעת נוכיח את הטענה עבור $A$ - באינדוקציה על מבנה הנוסחא $A$:

1. $A = p(t_1, ..., t_n)$. אז $p(t_1, ..., t_n)[t/x] = p(t_1[t/x], ..., t_n[t/x])$. מכיוון ש-$FV(p(t_1, ..., t_n)) = FV(t_1) \cup ... \cup FV(t_n)$ ו-$x{\notin}FV(s)$, $x{\notin}FV(t_i)$ לכל $1 \leq i \leq n$. לפי טענה שהוכחנו קודם, $t_i[t/x] = t_i$ לכל $1 \leq i \leq n$. לכן $p(t_1, ..., t_n)[t/x] = p(t_1, ..., t_n)$.
2. $A = \neg B$. אז $(\neg B)[t/x] = \neg(B[t/x])$. $FV(\neg B) = FV(B)$ ולכן $x{\notin}FV(B)$. לפי הנחת האינדוקציה $B[t/x] = B$ ולכן $(\neg B)[t/x] = \neg B$.

3. $A = B \circ C$. אז $(B \circ C)[t/x] = (B[t/x] \circ C[t/x])$.
$FV(B \circ C) = FV(B) \cup FV(C)$ ולכן $x \notin FV(C)$. לפי הנחת האינדוקציה $B[t/x] = B,\ C[t/x] = C$ ולכן $(B \circ C)[t/x] = B \circ C$.

4. $A = \forall yB$. אם $y = x$ אז $(\forall yB)[t/x] = \forall yB$. אחרת $(\forall yB)[t/x] = \forall y(B[t/x])$.
$FV(\forall yB) = FV(B) - \{y\}$. מכיוון ש-$y \neq x$, $x \notin FV(B)$ ולפי הנחת האינדוקציה $B[t/x] = B$. לכן $(\forall yB)[t/x] = \forall yB$.

5. $A = \exists yB$. הוכחה זהה למקרה הקודם.