לוגיקה למדעי המחשב - תרגול מס' 5

שקילויות, צורות נורמאליות, שלמות פונקציונאלית, לוגיקה רב-ערכית

משפט 1: (הצבת אקויולנטיים) אם $T \vdash_{CPL} A \leftrightarrow B$ אז לכל ψ ולכל p מתקיים:

$$T \vdash_{CPL} \psi\{A/p\} \leftrightarrow \psi\{B/p\}$$

המשפט מאפשר שימוש בשקילויות לצורך היסקים באופן הדומה לשימוש בזהויות באלגברה.

<u>שקילויות חשובות:</u>

סימונים:
- השקילויות המסומנות ב-(I) תקפות גם בלוגיקה האינטואיציוניסטית
- במקום $\vdash_{CPL} A \leftrightarrow B$, נסמן $A \equiv B$.

1. קבוצה 1: שלילה. (קבוצה זו מאפשרת למצוא לכל נוסחה נוסחה שקולה ב-NNF ($Negation\ normal\ form$), כלומר נוסחה שבה $\neg$ מופיע רק לפני פסוקים אטומיים.)

   (א) שלילה כפולה: $\neg\neg A \equiv A$

   (ב) דה-מורגן:

   i. $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$

   ii. $(I)\ \neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$

   iii. $\neg(A \to B) \equiv A \wedge \neg B$

2. קבוצה 2: (מאפשרת להשתמש בלוגיקה הקלאסית רק ב-$\neg$ וקשר נוסף).

   (א) $A \to B \equiv \neg A \vee B$

   (ב) $A \vee B \equiv \neg A \to B$

   (ג) $A \wedge B \equiv \neg(A \to \neg B)$

3. קבוצה 3: (מאפשרת לכתוב $A_1 \wedge A_2 ... \wedge A_n,\ A_1 \vee A_2 ... \vee A_m$ ללא סוגריים).

   (א) אידמפוטנטיות:

   i. $(I)\ A \vee A \equiv A$

   ii. $(I)\ A \wedge A \equiv A$

   (ב) אסוציאטיביות:

   i. $(I)\ A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$

   ii. $(I)\ A \vee (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$

   (ג) קומוטטיביות:

i. $(I)\ A \vee B \equiv B \vee A$
ii. $(I)\ A \wedge B \equiv B \wedge A$

4. קבוצה 4: (מאפשרת להגיע מצורת NNF לצורות CNF ו-DNF, כלומר צורות קוניוקטיביות/דיסיונקטיביות נורמאליות.)

(א) דיסטריבוטיביות:

i. $(I)\ A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
ii. $(I)\ A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

(ב) בליעה ($absorption$):

i. $(I)\ A \vee (A \wedge B) \equiv A$
ii. $(I)\ A \wedge (A \vee B) \equiv A$

5. קבוצה 5: (מאפשרת רדוקציה של גרירות)

(א) $(I)\ A \to (B \to C) \equiv A \wedge B \to C$
(ב) $(I)\ A \to (B \wedge C) \equiv (A \to B) \wedge (A \to C)$
(ג) $(I)\ (A \vee B) \to C \equiv (A \to C) \wedge (B \to C)$
(ד) $(\neg A \to \neg B) \equiv B \to A$

6. קבוצה 6: $A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$

נוסחה A הינה בצורת CNF אם היא מהצורה $C_1 \wedge ... \wedge C_m$ כאשר כל נוסחה C_i היא מהצורה $B_i^1 \vee ... \vee B_i^{n_i}$ וכל נוסחה B_i^j היא או אטום או שלילה של אטום.

נוסחה A הינה בצורת DNF אם היא מהצורה $C_1 \vee ... \vee C_m$ כאשר כל נוסחא C_i היא מהצורה $B_i^1 \wedge ... \wedge B_i^{n_i}$ וכל נוסחא B_i^j היא או אטום או שלילה של אטום.

עוד מעט נראה שלכל נוסחה אפשר למצוא נוסחה שקולה בצורת CNF או DNF.

<u>תרגיל 1</u>: יש למצוא נוסחה בצורת CNF השקולה לנוסחה $p \leftrightarrow (q \wedge \neg p)$.

$$p \leftrightarrow (q \wedge \neg p) \equiv (p \to (q \wedge \neg p)) \wedge ((q \wedge \neg p) \to p) \equiv^{2a} ((\neg p \vee (q \wedge \neg p)) \wedge (\neg (q \wedge \neg p) \vee p))$$
$$\equiv^{2a,3a,3b} \underbrace{(\neg p \vee (q \wedge \neg p))}_{\equiv \neg p} \wedge (\neg q \vee p) \equiv^{*} \underbrace{\neg p \wedge (\neg q \vee p)}_{CNF}$$
$$(*)\ (\neg p \vee (q \wedge \neg p)) \equiv^{3c} \neg p \vee (\neg p \vee q) \equiv^{4b} \neg p$$

שימו לב שהנוסחה שהתקבלה אינה בצורת CNF מלאה.

לכל נוסחה A שרשימת הפסוקים האטומיים שלה היא $\overrightarrow{p} =< p_1, ..., p_n >$ (הרשימה מסודרת לפי האינדקסים של האטומים), ניתן להגדיר את פונקציית האמת של A, $g_A^{\overrightarrow{p}} : \{t, f\}^n \rightarrow \{t, f\}$ בצורה הבאה:

$$g_A^{\overrightarrow{p}}(x_1, ..., x_n) = v(A)$$

כאשר v היא השמה הנותנת לאטום p_i את הערך x_i.

משפט 2: לכל פונקציה $f : \{t, f\}^n \rightarrow \{t, f\}$ ולכל $\overrightarrow{p} =< p_1, ..., p_n >$ אפשר למצוא נוסחה ψ בצורת CNF ונוסחה φ בצורת DNF, כך ש:

$$g_\psi^{\overrightarrow{p}} = g_\varphi^{\overrightarrow{p}} = f$$

נדגים את המשפט בעזרת הגדרת קשר תלת-מקומי חדש $If...then...else$:
אם $v(p) = t$ אז $v(If\ p\ then\ q\ else\ r) = v(q)$
אם $v(p) = f$ אז $v(If\ p\ then\ q\ else\ r) = v(r)$

טבלת האמת של הקשר:

p	q	r	$If\ p\ then\ q\ else\ r$
t	t	t	t
t	t	f	t
t	f	t	f
t	f	f	f
f	t	t	t
f	t	f	f
f	f	t	t
f	f	f	f

צורת DNF מלאה ל-$If\ \ p\ \ then\ \ q\ \ else\ \ r$:

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$$

צורת DNF מקוצרת ל-$If\ \ p\ \ then\ \ q\ \ else\ \ r$:

$$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$$

צורת DNF מלאה ל-$\neg(If\ \ p\ \ then\ \ q\ \ else\ \ r)$:

$$(p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

צורת DNF מקוצרת ל-$\neg(If\ \ p\ \ then\ \ q\ \ else\ \ r)$:

$$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg r)$$

צורת CNF מלאה ל-$If \ \ p \ \ then \ \ q \ \ else \ \ r$:

$$(\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee r)$$

צורת CNF מקוצרת ל-$If \ \ p \ \ then \ \ q \ \ else \ \ r$:

$$(\neg p \vee q) \wedge (p \vee r) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow r)$$

קבוצת קשרים S תיקרא שלמה פונקציונאלית אם לכל פונקציית אמת $f : \{t, f\}^n \rightarrow \{t, f\}$ קיימת נוסחה A שרשימת הפסוקים האטומיים שלה היא $\overrightarrow{p}$ ומתקיים:

1. A מכילה רק קשרים מ-S
2. $g_A^{\overrightarrow{p}} = f$

מסקנה ממשפט 2: הקבוצות $\{\neg, \rightarrow\}$, $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$ הן שלמות פונקציונאלית.

תרגיל 2: נתונה טבלת האמת של הקשר $\downarrow$:

p	q	$p \downarrow q$
t	t	f
t	f	f
f	t	f
f	f	t

הוכח שהקבוצה $\{\downarrow\}$ היא שלמה פונקציונאלית.

נשים לב שמספיק להראות שניתן לבטא קבוצת קשרים שלמה פונקציונאלית כלשהי בעזרת הקשר $\downarrow$ (מדוע?). למשל, נבטא את $A \wedge B$ ו-$\neg A$ בעזרת $\downarrow$:

$$A \wedge B \equiv ((A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B))$$

$$\neg A \equiv A \downarrow A$$

איך אפשר לוודא שמערכת קשרים מסויימת לא שלמה? עלינו למצוא פונקציה ששונה מפונקציית האמת של כל פסוק שמורכב מהקשרים הנ"ל.

תרגיל 3: הוכח שמערכת הקשרים $\{\wedge, \rightarrow\}$ אינה שלמה פונקציונאלית.

למשל לא ניתן לבטא בעזרת פסוק שמכיל רק את הקשרים האלה את טבלת האמת הבאה:

p	q	
t	t	f
t	f	t
f	t	t
f	f	t

קבוצת הפסוקים הבנויים מהקשרים $\wedge, \rightarrow$ היא קבוצה הנבנית באינדוקציה מהאטומים. נוכיח באינדוקציה על מבנה הפסוק A: אם A שייך לקבוצת הפסוקים המכילים את הקשרים $\wedge, \rightarrow$, אז ההשמה שנותנת ערך t לכל פסוק אטומי מספקת את A.

<u>הוכחה:</u> לגבי האטומים הטענה מתקיימת באופן טריויאלי. נניח שעבור פסוקים B, C שמכילים רק קשרים מ-$\{\rightarrow, \wedge\}$, $v(B) = t, v(C) = t$. אז לפי טבלאות האמת של הקשרים, $v(B \wedge C) = t$, $v(B \rightarrow C) = t$.

לכן לא קיים פסוק שמכיל רק את הקשרים $\wedge, \rightarrow$ שפונקציית האמת שלו זהה לפונקציה שבחרנו.

<u>לוגיקה רב-ערכית ושימושיה</u>

לוגיקה רב-ערכית היא הכללה של לוגיקה דו-ערכית שאנחנו כבר מכירים בצורה הבאה:

- במקום שני ערכי אמת בלבד, יש קבוצה של ערכי אמת S (בדרך כלל $t, f \in S$). S יכולה להיות גם אינסופית.
- מגדירים גם קבוצת הערכים המצויינים D. D היא תת-קבוצה לא ריקה שמוכלת ממש ב-S. בדרך כלל $t \in D, f \notin D$.
- לכל קשר n-מקומי * מתאימים פונקצית אמת $g_* : S^n \rightarrow S$.
- מגדירים השמה מקבוצת הנוסחאות אל S כפונקציה המכבדת את טבלאות האמת החדשות. נאמר שהשמה v היא מודל של נוסחא A אם $v(A) \in D$.
- יחס נביעה, טאוטולוגיה, סתירה - מוגדרים כמו במקרה הדו-ערכי.

דוגמא ללוגיקה תלת-ערכית: הלוגיקה של $G\hat{o}del$

$$S = \{t, f, \perp\}, \;\; D = \{t\}.$$

$\rightarrow$	t	f	$\perp$
t	t	f	$\perp$
f	t	t	t
$\perp$	t	f	t

$\neg$	
t	f
f	t
$\perp$	f

$\wedge$	t	f	$\perp$
t	t	f	$\perp$
f	f	f	f
$\perp$	$\perp$	f	$\perp$

$\vee$	t	f	$\perp$
t	t	t	t
f	t	f	$\perp$
$\perp$	t	$\perp$	$\perp$