לוגיקה למדעי המחשב - תרגול מס' 4

קונסיסטנטיות, קומפקטיות והקשר בין סינטקס לסמנטיקה ב-HPC

תרגיל 1: נגדיר תחשיב F באופן הבא:

1. נוסחאות חוקיות: כל המחרוזות מעל $\{x, y, \to, \neg, (,)\}$
2. אקסיומות: x, y
3. כללי היסק:

$$\frac{A}{(\neg A)}\ (N) \qquad \frac{A, B}{(A \to B)}\ (I)$$

הוכח: אוסף כל המשפטים של F הוא אוסף הנוסחאות החוקיות ב- HPC מעל $\{x, y \to, \neg, (,)\}$.

כיוון 1: אם $\vdash_F A$ אז A הוא פסוק חוקי מעל x, y. נוכיח באינדוקציה על n: אם $A_1, ..., A_n$ היא סדרת הוכחה של A ב-F, אז A הוא פסוק חוקי ב- HPC מעל $\{x, y \to, \neg, (,)\}$.

- בסיס: $n = 1$. אז A הוא אקסיומה ולכן $A = x$ או $A = y$. לכן A הוא פסוק חוקי ב- HPC מעל $\{x, y \to, \neg, (,)\}$.
- הנחת האינדוקציה: לכל $i < n$ מתקיים: אם $A_1, ..., A_i$ היא סדרת הוכחה של A ב-F, אז A הוא פסוק חוקי ב-HPC מעל $\{x, y \to, \neg, (,)\}$.
- צעד האינדוקציה: תהי $A_1, ..., A_n$ סדרת הוכחה של A ב-F. $A = A_n$ ואחת האפשרויות מתקיימת: או ש-A אקסיומה, או ש-A התקבל מאיברים קודמים בסדרה על ידי הפעלת אחד כללי ההיסק. אם A הוא אקסיומה, ההוכחה זהה לבסיס האינדוקציה.
  אם A התקבל מ-B על ידי כלל היסק (N) אז $A = (\neg B)$. ל-B יש סדרת הוכחה באורך קטן מ-n ולכן על פי הנחת האינדוקציה, B הוא פסוק חוקי מעל $\{x, y \to, \neg, (,)\}$. לפי הגדרת קבוצת הפסוקים החוקיים ב-HPC, גם $A = (\neg B)$ הוא פסוק חוקי ב-HPC מעל $\{x, y \to, \neg, (,)\}$.
  אם A התקבל מ-B, C על ידי כלל היסק (I) אז $A = (B \to C)$. ל-B, C יש סדרות הוכחה באורך קטן מ-n ולכן על פי הנחת האינדוקציה, B, C הם פסוקים חוקיים ב-HPC מעל $\{x, y \to, \neg, (,)\}$. לפי הגדרת קבוצת הפסוקים החוקיים ב-HPC, גם $A = (B \to C)$ הוא פסוק חוקי ב-HPC מעל $\{x, y \to, \neg, (,)\}$.

כיוון 2: אם A הוא פסוק חוקי מעל $\{x, y \to, \neg, (,)\}$ אז $\vdash_F A$. נוכיח באינדוקציה על מבנה הפסוק A.

- בסיס: A הוא פסוק אטומי . אז $A = x$ או $A = y$. סדרת ההוכחה של A ב-A במקרה כזה היא A עצמו.

- הנחת האינדוקציה: נניח שאם B,C פסוקים חוקיים ב-HPC מעל $\{x,y\to,\neg,(,)\}$ אז $\vdash_F B$ ו-$\vdash_F C$.
- צעד האינדוקציה:
  - $A=(\neg B)$. לפי הנחת האינדוקציה, ל-B יש סדרת הוכחה $B_1,...,B$ ב-F. לכן $B_1,...,B,(\neg B)$ היא הוכחה חוקית של A ב-F, מכיוון ש-A מתקבל מאיבק קודם לו בסדרה על ידי הפעלת כלל היסק (N).
  - $A=(B\to C)$. לפי הנחת האינדוקציה, ל-B ול-C יש סדרות הוכחה $B_1,...,B$ ו-$C_1,...,C$ ב-F. אז $B_1,...,B,C_1...,C,(B\to C)$ היא סדרת הוכחה של A ב-F, מכיוון ש-A מתקבל מאיברים קודמים לו בסדרה על ידי הפעלת כלל היסק (I).

הגדרות:

1. קבוצת פסוקים T היא קונסיסטנטית (עקבית) ב-HPC אמ"ם אין נוסחא A כך ש-$T\vdash_{HPC}A$ וגם $T\vdash_{HPC}\neg A$.
2. קבוצת פסוקים T היא קונסיסטנטית ב-HPC אם קיימת נוסחא A כך ש-$T\nvdash_{HPC}A$.

נוכיח את שקילות שתי ההגדרות האלה:

כיוון 1: נראה שההגדרה הראשונה גוררת את השנייה, כלומר כל קבוצה קונסיסטנטית לפי ההגדרה הראשונה היא גם קונסיסטנטית לפי הגדרה השנייה. נניח ש-T היא כזו שאין נוסחא A כך ש-$T\vdash_{HPC}A$ וגם $T\vdash_{HPC}\neg A$. נבחר נוסחא כלשהי B. אם $T\vdash_{HPC}B$ אז $T\nvdash_{HPC}\neg B$. אחרת $T\nvdash_{HPC}B$. בכל מקרה קיים פסוק שאינו יכיח מ-T, כלומר T קונסיסטנטית לפי ההגדרה השנייה.

כיוון 2: נניח ש-T עקבית לפי ההגדרה השנייה, כלומר נניח שיש נוסחא B כך ש-$T\nvdash_{HPC}B$. נניח בשלילה שקיימת נוסחא A כך ש-$T\vdash_{HPC}A$ וגם $T\vdash_{HPC}\neg A$ ונגיע לסתירה.
בתרגיל מס' 3 הוכחנו טענה $A,\neg A\vdash_{HPC}B$. על ידי שימוש במשפט הדדוקציה ותכונות של HPC אפשר לקבל $\vdash_{HPC}(\neg A\to(A\to B))$. ואז אנחנו יכולים לקבל הוכחה של B מ-T באופן הבא:

... $(\neg A\to(A\to B))$ - הוכחה של $(\neg A\to(A\to B))$

... $\neg A$ - הוכחה של $\neg A$ מ-T

$(A\to B)$ - MP

... A - הוכחה של A מ-T

B - MP

קיבלנו סתירה להנחה ש-$T\nvdash_{HPC}B$.

<u>משפט מהרצאה:</u> קבוצת פסוקים T קונסיסטנטית ב-HPC אמ"ם היא ספיקה.

<u>הקשר בין סמנטיקה לסינטקס בתחשיב הפסוקים:</u>

סמנטיקה		סינטקס
A טאוטולוגיה - $\vdash_{CPL} A$	(משפט השלמות $\Leftarrow$), (משפט התקפות $\Rightarrow$)	A יכיח - $\vdash_{HPC} A$
A נובע סמנטית מ- T - $T \vdash_{CPL} A$	(משפט השלמות $\Leftarrow$), (משפט התקפות $\Rightarrow$)	A יכיח מ- T - $T \vdash_{HPC} A$
$T \vdash_{CPL} (A \to B) \Leftrightarrow T, A \vdash_{CPL} B$		$T \vdash_{HPC} (A \to B) \Leftrightarrow T, A \vdash_{HPC} B$
T ספיקה	משפט מהרצאה	T קונסיסטנטית

<u>משפט הקומפקטיות:</u> תורה T היא ספיקה אמ"ם כל $T_1 \subseteq T$ סופית ספיקה.

<u>תרגיל:</u> צביעה חוקית ב-k צבעים של גרף פשוט $G = (V, E)$ היא פונקציה $f : V \to \{1, ..., k\}$ כך ש-$f(a) \neq f(b)$ אם יש קשת ב-E בין a ל-b. נוכיח שאם כל תת-גרף סופי של G ניתן לצביעה ב-k צבעים אז הגרף כולו ניתן לצביעה ב-k צבעים.

<u>פתרון:</u> נתון גרף פשוט $G = (V, E)$.
נגדיר קבוצה של פסוקים אטומיים $P = \{P_u^i \mid u \in V, i \in \{1, ..., k\}\}$. המטרה שלנו היא שפסוק P_u^i יקבל ערך t אמ"ם צומת u צבוע בצבע i. כעת נגדיר תורה $T = T_1 \cup T_2 \cup T_3$ שמבטאת צביעה חוקית של הגרף באופן הבא:

1. $T_1 = \{P_u^1 \vee ... \vee P_u^k \mid u \in V\}$ - כל צומת בגרף צבוע בלפחות צבע אחד
2. $T_2 = \{\neg(P_u^i \wedge P_u^j) \mid u \in V, i \neq j \in \{1, ..., k\}\}$ - כל צומת בגרף לא צבוע ביותר מצבע אחד
3. $T_3 = \{\neg(P_u^i \wedge P_w^i) \mid (u, w) \in E, i \in \{1, ..., k\}\}$ - כל שני צמתים בגרף המחוברים בקשת לא צבועים באותו צבע.

טענה: כל תורה סופית $T' \subseteq T$ היא ספיקה.

<u>הוכחה:</u>
תהיי $T' \subseteq T$ תורה סופית כלשהי.
נגדיר: $V' = \{u \in V \mid P_u^i \ occurs \ in \ T' \ for \ some \ i \in \{1, 2, ..., k\}\}$
ו-$E' = E \cap (V' \times V')$.
הגרף $G' = (V', E')$ הוא תת גרף סופי של $G = (V, E)$. לכן לפי ההנחה קיימת עבורו צביעה חוקית f. תהיי v כל השמה המקיימת:

$$\forall u \in V', i \in \{1, ..., k\} : \ v(P_u^i) = \begin{cases} t & f(u) = i \\ f & otherwise \end{cases}$$

נוכיח ש-v היא מודל של T':
יהי A פסוק ב-T'. אז A מאחת הצורות הבאות:

- $P_u^1 \vee ... \vee P_u^k$ עבור $u \in V$ כלשהו. לפי הגדרת V', $u \in V'$. מכיוון ש-f היא צביעה חוקית של G', קיים $i \in \{1, 2, ..., k\}$ כך ש-$f(u) = i$. לפי הגדרת v, היא מספקת את $P_u^1 \vee ... \vee P_u^k$.

- $\neg(P_u^i \wedge P_u^j)$ עבור $u \in V$ ו-$i, j \in \{1,2,...,k\}$ כלשהם. לפי הגדרת V', $u \in V'$. מכיוון ש-f היא צביעה חוקית של G', לכל u קיים $i \in \{1,2,...,k\}$ יחיד כך ש-$f(u) = i$. לפי הגדרת v, היא מספקת את $\neg(P_u^i \wedge P_u^j)$.

- $\neg(P_u^i \wedge P_w^i)$ עבור $u, w \in V$ ו-$i \in \{1,2,...,k\}$ כלשהם. השלימו את ההוכחה.

הראינו ש-v היא מודל של T', כלומר T' ספיקה. לכן לפי משפט הקומפקטיות, T ספיקה. תהיי v' מודל של T. אזי נגדיר צביעה של $G = (V, E)$ באופן הבא:
$\forall u \in V: \ f(u) = i \Leftrightarrow \ v'(P_u^i) = t$.
נוכיח שזו אכן צביעה חוקית:

- נראה ש-f היא פונקציה מ-V ל-$\{1,2,...,k\}$: לכל $u \in V$ היא מתאימה $i \in \{1,2,...,k\}$ יחיד. יהי $u \in V$. אז $P_u^1 \vee ... \vee P_u^k \in T$ וגם לכל $i, j \in \{1,2,...,k\}$, $\neg(P_u^i \wedge P_u^j) \in T$. מכיוון ש-$v'$ מודל של T, היא מספקת את כל הפסוקים האלה. לפי הגדרת f, קיים בדיוק $i \in \{1,2,...,k\}$ אחד כך ש-$f(u) = i$.

- נראה שלכל $(a, b) \in E$, $f(a) \neq f(b)$ - השלימו לבד.