# לוגיקה למדעי המחשב - תרגול מס' 3

# מערכת דדוקטיבית לתחשיב הפסוקים

בתרגיל הקודם ראינו דרך להגדרה סמנטית של יחס הנביעה. כעת נראה דרך אחרת - הגישה הדדוקטיבית. לפי גישה זו, פסוק A נובע מתורה T אם יש ל-A הוכחה מ-T.

קיימות מערכות הוכחה שונות שמגדירות את מושג ההוכחה באופן שונה. היום נעסוק במערכות נוסח הילברט.

## מערכות הילברט:

בהינתן שפה L, קבוצת פסוקים נבחרת כקבוצת אקסיומות. כמו כן בוחרים קבוצה (בד"כ סופית) של כללי היסק.
הוכחה של פסוק A מתורה T במערכת הילברט היא רשימה סופית של פסוקים ש-A הוא האיבר האחרון שלה וכל אחד מאיבריה הוא או אקסיומה או פסוק מ-T או שהתקבל מאיברים קודמים על ידי הפעלת כלל היסק כלשהו עליהם.
A הוא משפט של המערכת אם יש לו הוכחה מ-$\emptyset$ (תורה ריקה).

כעת נגדיר מערכת נוסח הילברט $HPC$. המרכיבים שלה:

- אקסיומות:
  - (I1) $(A \to (B \to A))$
  - (I2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
  - (N1) $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$
  - (N2) $\neg\neg A \to A$
  - (C1) $A \land B \to A$
  - (C2) $A \land B \to B$
  - (C3) $A \to (B \to A \land B)$
  - (D1) $A \to A \lor B$
  - (D2) $B \to A \lor B$
  - (D3) $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \lor B \to C))$
- כלל היסק:

$$(MP)\ \frac{A \quad A \to B}{B}$$

נאמר ש-$T \vdash_{HPC} A$ אם ל-A יש הוכחה ב-HPC מ-T.

<u>הערה</u>: מערכת $HPI$ מתקבלת מ-$HPC$ על ידי החלפת האקסיומה $(N2)$ באקסיומה $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B))$ $(N2^I)$.

<u>דוגמא 1</u>: הוכח $A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash_{HPC} A \rightarrow C$.

<u>הוכחה</u>:

1. $(B \rightarrow C)$ - הנחה
2. $(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$ - (I1)
3. $(A \rightarrow (B \rightarrow C))$ - MP 1,2
4. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ - (I2)
5. $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$ - MP 3,4
6. $(A \rightarrow B)$ - הנחה
7. $(A \rightarrow C)$ - MP 5,6

<u>דוגמא 2</u>: הוכח $A, \neg A \vdash_{HPC} B$.

<u>הוכחה</u>:

1. $\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ - (I1)
2. $\neg A$ - הנחה
3. $(\neg B \rightarrow \neg A)$ - MP 1,2
4. $A \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$ - (I1)
5. $A$ - הנחה
6. $(\neg B \rightarrow A)$ - MP 4,5
7. $(\neg B \rightarrow A) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg\neg B$ - (N2)
8. $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg\neg B$ - MP 6,7
9. $\neg\neg B$ - MP 6,8
10. $\neg\neg B \rightarrow B$ - (N1)

11. $B$ - MP 9,10

תכונות כלליות של הוכחה מתוך הנחות:

1. אם $A \in T$ אז $T \vdash_{HPC} A$
2. אם $T_1 \subseteq T_2$ אז לכל $A$ אם $T_1 \vdash_{HPC} A$ אז $T_2 \vdash_{HPC} A$.
3. אם $T \cup \{A\} \vdash_{HPC} B$ וגם $T \vdash_{HPC} A$ אז $T \vdash_{HPC} B$
4. אם לכל פסוק $A$ ב-$T_1$ מתקיים $T_2 \vdash_{HPC} A$ אז לכל פסוק $B$ אם $T_1 \vdash_{HPC} B$ אז $T_2 \vdash_{HPC} B$. כלומר, אם ניתן בעזרת ההנחות ב-$T_2$ להוכיח כל טענה ב-$T_1$ אז כל מה שניתן להוכיח מ-$T_1$ ניתן להוכיח גם מ-$T_2$.
הוכחה: $T_1 \vdash_{HPC} A$, לכן יש הוכחה $B_1, ..., B_n$ ל-$B$ מתוך $T_1$. נעבור פסוק פסוק לפי הסדר בסדרה $B_1, ..., B_n$: אם $B_i$ אקסיומה נשאיר אותו במקומו, אם הוא איבר ב-$T_1$ נחליף אותו בסדרת ההוכחה $B'_1, ..., B'_n$ עבורו מתוך $T_2$, אם $B_i$ התקבל מאיברים קודמים על ידי כלל היסק נשאיר אותו במקומו. קיבלנו סדרת הוכחה מתוך $T_2$ והפסוק האחרון בה הוא $B$ כנדרש.

מה המסקנה לגבי היחס $\vdash_{HPC}$?

משפט הדדוקציה:

$$T, A \vdash_{HPC} B \;\Leftrightarrow\; T \vdash_{HPC} (A \to B)$$

משפט זה יהיה מאוד שימושי לצרכינו. שימו לב לדמיון בינו לבין הטענה

$$T, A \vdash_{CPL} B \;\Leftrightarrow\; T \vdash_{CPL} (A \to B)$$

שראינו בתחום הסמנטי.

## שימוש במשפט הדדוקציה:

דוגמא 3: הוכח $A \to B, B \to C \vdash_{HPC} A \to C$ תוך שימוש במשפט.

הוכחה: על פי משפט הדדוקציה,

$$(A \to B), (B \to C), A \vdash_{HPC} C \;\Leftrightarrow\; (A \to B), (B \to C) \vdash_{HPC} (A \to C)$$

1. $A \to B$ - הנחה
2. $A$ - הנחה
3. $B$ - MP 1,2
4. $B \to C$ - הנחה

5. $C$ - MP 3,4

<u>דוגמא 4</u>: הוכח $(A \to B) \vdash_{HPC} (\neg B \to \neg A)$ תוך שימוש במשפט.

<u>הוכחה</u>: על פי משפט הדדוקציה,

$$(A \to B), \neg B \vdash_{HPC} \neg A \;\Leftrightarrow\; A \to B \vdash_{HPC} (\neg B \to \neg A)$$

1. $\neg B \to (A \to \neg B)$ - (I1)
2. $\neg B$ - הנחה
3. $(A \to \neg B)$ - MP 1,2
4. $(A \to B)$ - הנחה
5. $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$ - (N1)
6. $(A \to \neg B) \to \neg A$ - MP 4,5
7. $\neg A$ - MP 3,6

<u>דוגמא 5</u>:
המערכת $HPC'$ מתקבלת מ-$HPC$ על ידי החלפת האקסיומות (N1),(N2) באקסיומה (N): $((\neg A \to \neg B) \to (\neg A \to B) \to A)$. הוכח ש-$HPC$ שקולה ל-$HPC'$.
מספיק להראות:

1. $\vdash_{HPC'} (N1), \vdash_{HPC'} (N2)$
הוכחה: נשים לב שההוכחה של משפט הדדוקציה עבור HPC תקפה גם עבור HPC' כי ההוכחה משתמשת ב-MP ו-(I1),(I2) שלא השתנו. לכן מותר לנו להשתמש במשפט הדדוקציה.
למה 1: $\vdash_{HPC'} A \to A$ - נובעת ישירות ממשפט הדדוקציה.

לפי משפט הדדוקציה, $\vdash_{HPC'} \neg\neg A \to A \;\Leftrightarrow\; \neg\neg A \vdash_{HPC'} A$

(א) $(\neg A \to \neg\neg A) \to ((\neg A \to \neg A) \to A)$ - (N)
(ב) $\neg\neg A \to (\neg A \to \neg\neg A)$ - (I1)
(ג) $\neg\neg A$ - הנחה
(ד) $(\neg A \to \neg\neg A)$ - MP 2,3
(ה) $(\neg A \to \neg A) \to A$ - MP 1,4
(ו) $(\neg A \to \neg A)$ - למה 1
(ז) $A$ - MP 5,6

השלימו את ההוכחה של $\vdash_{HPC} (N2)$.

2. $\vdash_{HPC} (N)$ - השלימו בבית