לוגיקה למדעי המחשב - תרגול מס' 2

סמנטיקה של תחשיב הפסוקים

<u>מושגים בסיסיים:</u>

- <u>ערכי אמת:</u> t - נכון, f - שקרי.
- לכל קשר n-מקומי $\circ$ נתאים פונקציה $\circ^* : \{t,f\}^n \to \{t,f\}$ שנ-קראת גם <u>טבלת האמת</u> של הקשר. להלן טבלאות האמת של הקשר-ים הבסיסיים:

A	B	$A \wedge B$
t	t	t
t	f	f
f	t	f
f	f	f

A	B	$A \vee B$
t	t	t
t	f	t
f	t	t
f	f	f

A	B	$A \to B$
t	t	t
t	f	f
f	t	t
f	f	t

A	B	$A \leftrightarrow B$
t	t	t
t	f	f
f	t	f
f	f	t

A	$\neg A$
t	f
f	t

- <u>השמה</u> היא פונקציה $v : P \to \{t,f\}$ שמתאימה ערך אמת לכל פסוק המקיימת: $v(\neg A) = \neg^*(v(A))$, $v(A \circ B) = \circ^*(v(A), v(B))$.

כעת נוכיח טענה שאומרת שבהינתן פסוק A, ערכי האמת שנותנת השמה כלשהי v לפסוקים האטומיים שב-A קובעים באופן חד משמעי את ערך האמת $v(A)$.

<u>תזכורת</u>: קבוצת הפסוקים האטומיים של A, המסומנת $At(A)$ מוגדרת באופן רקורסיבי:

1. $At(p) = \{p\}$
2. $At(\neg A) = At(A)$
3. $At(A \circ B) = At(A) \cup At(B)$

טענה 1: יהי A פסוק ו-v, v' השמות כלשהן. אם לכל $p \in At(A)$ מתקיים $v(p) = v'(p)$, אז $v(A) = v'(A)$. ההוכחה - באינדוקציה על מבנה הפסוק A.

1. אם A הוא פסוק אטומי, אז לפי הגדרת $At(A)$, $At(A) = \{A\}$. ברור שהטענה מתקיימת.
2. נניח שעבור הפסוקים B, C מתקיימת הטענה.
אם $A = \neg B$, לפי הגדרת הקבוצה $At(\neg B)$, $At(\neg B) = At(B)$. לכן אם לכל $p \in At(A)$ מתקיים $v(p) = v'(p)$, אז לכל $p \in At(B)$ מתקיים $v(p) = v'(p)$. לפי הנחת האינדוקציה, $v(B) = v'(B)$. לכן

$$v(A) = v(\neg B) = \neg^*(v(B)) = \neg^*(v'(B)) = v'(\neg B) = v'(A)$$

והטענה מתקיימת.
אם $A = B \circ C$ אז לפי הגדרת $At(A)$, $At(A) = At(B) \cup At(C)$. לכן אם לכל $p \in At(A)$ מתקיים $v(p) = v'(p)$, אז לכל $p \in At(B)$ ולכל $p \in At(C)$ מתקיים $v(p) = v'(p)$. לפי הנחת האינדוקציה, $v(B) = v'(B)$ ו-$v(C) = v'(C)$. לכן

$$v(A) = v(B \circ C) = \circ^*(v(B), v(C)) = \circ^*(v'(B), v'(C)) = v'(B \circ C) = v'(A)$$

והטענה מתקיימת.

מסקנה: בהינתן פסוק A כך ש-$At(A) = \{p_1, ..., p_n\}$, ערך האמת שנותנת לפסוק השמה כלשהי v ניתן לחישוב באופן רקורסיבי ותלוי אך ורק ב-$v(p_1), ..., v(p_n)$.

הגדרות:

1. השמה v היא מודל של פסוק A (מספקת את הפסוק A) אמם $v(A) = t$. סימון: $v \models A$
2. השמה v היא מודל של קבוצת פסוקים T (תורה) (מספקת את התורה T) אמם $v(A) = t$ לכל $A \in T$. סימון: $v \models T$
3. $T \vdash_{CPL} A$ אמם כל מודל של T הוא גם מודל של A.

4. פסוק הוא ספיק אם קיים לו מודל. תורה היא ספיקה אם קיים לה מודל.

5. פסוק A הוא טאוטולוגיה אם כל השמה היא מודל של A. סימון: $\vdash_{CPL} A$

6. פסוק A הוא סתירה אם לא קיים לו מודל.

7. פסוקים A, B הם שקולים לוגית אם לכל השמה v מתקיים: $v(A) = t$ אמם $v(B) = t$.

נבדוק האם הפסוק $(P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$ הוא טאוטולוגיה:

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$(P \to Q)$	$(\neg Q \to \neg P)$	$(P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$
f	f	t	t	t	t	t
f	t	t	f	t	t	t
t	f	f	t	f	f	t
t	t	f	f	t	t	t

טענה 2: $T \vdash_{CPL} A$ אמם $T \cup \{\neg A\}$ אינה ספיקה.

כיוון 1: $T \vdash_{CPL} A$ ונניח בשלילה כי $T \cup \{\neg A\}$ ספיקה. אז קיימת השמה v שהיא מודל של $T \cup \{\neg A\}$. לכן היא מודל של T וגם של $\neg A$. כלומר $v(\neg A) = t$. מכיוון ש-$v(\neg A) = \neg^*(v(A))$, לפי טבלת האמת של הקשר $\neg$: $v(A) = f$. קיבלנו ש-v מודל של T אבל היא אינה מודל של A בסתירה להנחה ש-$T \vdash_{CPL} A$.

כיוון 2: $T \cup \{\neg A\}$ אינה ספיקה. נוכיח שכל מודל של T הוא גם מודל של A. תהיי השמה v מודל של T. מכיוון ש-$T \cup \{\neg A\}$ אינה ספיקה, $v \not\models \neg A$, כלומר $v(\neg A) = f$. לפי טבלת האמת של הקשר $\neg$: $v(A) = t$. לכן v היא מודל של A.

טענה 3: פסוקים A, B שקולים לוגית אמם $\vdash_{CPL} (A \to B) \land (B \to A)$.

טענה 4 (הוכחה בהרצאה): $T \cup \{A\} \vdash_{CPL} B$ אמם $T \vdash_{CPL} (A \to B)$.