לוגיקה למדעי המחשב - תרגול מס' 14

שפות רב-סוגיות

במקרים רבים אנחנו מחלקים עצמים מתמטיים לסוגים שונים. למשל, באלגברה לינארית אנחנו מדברים על לפחות שני סוגי עצמים: וקטורים וסקלרים. במקרים כאלה נוח להשתמש בשפות רב-סוגיות.

בשפה רב-סוגית יש במקום סוג אחד של ש"ע (i) כמה סוגים (ייתכן גם אינסוף). הסיגנטורה של שפה רב-סוגית כוללת עתה מידע לא רק על מספר המקומות ($arity$) אלא גם על סוגים. כמו כן, לכל סוג r בשפה, יש משתנים $v_0^r, v_1^r, ...$.

לדוגמא, בשפה עבור מרחבים וקטוריים יש שני סוגים: s עבור סקלרים ו-v עבור וקטורים. הסיגנטורה של השפה כוללת:

- קבועים $0_s : s, 0_v : v$
- סימני פונקציה $+_s : s \times s \to s,\ +_v : v \times v \to v,\ \cdot : s \times v \to v$
- סימני יחס $=_s : s \times s \to o, =_v : v \times v \to o$.

<u>סמנטיקה עבור שפות רב-סוגיות:</u>

מבנה עבור שפה רב-סוגית מכיל תחום D_r לכל סוג r ופונקציית פירוש I המקיימת:

- $I[c] \in D_r$ לכל קבוע $c : r$.
- $I[p] \subseteq D_{r_1} \times ... \times D_{r_n}$ לכל פרדיקט $p : r_1 \times ... \times r_n \to o$.
- $I[f] : D_{r_1} \times ... \times D_{r_{n-1}} \to D_{r_n}$ לכל סימן פונקציה $f : r_1 \times ... r_{n-1} \to r_n$.

כל השמה v מכבדת את סוגי המשתנים, כלומר $v[x^r] \in D_r$ לכל סוג r.

השימוש בשפות רב-סוגיות הוא לעיתים נוח יותר, אבל כוח הביטוי אינו משתנה: כל מה שניתן לביטוי בעזרת שפה רב-סוגית, ניתן לביטוי גם בשפה מסדר ראשון (רק בצורה מסורבלת יותר). נראה כעת את התרגום.

<u>רדוקציה משפה רב-סוגית לחד-סוגית:</u>

תהי σ סיגנטורה של שפה רב-סוגית. נגדיר סיגנטורה חד-סוגית σ' באופן הבא:

1. אם s_i סוג עבור σ, אז σ' תכלול סימן יחס חד-מקומי חדש S_i.
2. אם $c : s$ נמצא ב-σ אז $c : \iota$ יהיה ב-σ'.
3. אם $f : s_1 \times s_2 ... \times s_n \to s$ נמצא ב-σ אז סימן פונקציה n-מקומי f יהיה ב-σ'.
4. אם $p : s_1 \times s_2 ... \times s_n \to o$ נמצא ב-σ אז סימן יחס n-מקומי p יהיה ב-σ'.

$Th(\sigma)$ היא קבוצת פסוקים של $L(\sigma')$ המורכבת מכל הפסוקים מהצורה:

1. $\forall v_1...\forall v_n p(v_1,...,v_n) \rightarrow S_1(v_1) \wedge ... \wedge S_n(v_n)$ כאשר $p : s_1 \times ... \times s_n \rightarrow o$ ב-σ.
2. $S(c)$ כאשר c הוא קבוע מסוג s ב-σ.
3. $\forall v_1...\forall v_n S_1(v_1) \wedge ... \wedge S_n(v_n) \rightarrow S_{n+1}(f(v_1,...,v_n))$ כאשר $f : s_1 \times ... \times s_n \rightarrow s_{n+1}$ ב-σ.

נגדיר Tr - תרגום נוסחאות בשפה רב-סוגית $L(\sigma)$ לשפה מסדר ראשון $L(\sigma')$:

- תרגום שמות עצם:
  1. Tr מתאימה לכל משתנה v_j^s של σ משתנה שונה v_i של $L(\sigma')$.
  2. $Tr[c] = c$
  3. $Tr[f(t_1,...,t_n)] = f(Tr[t_1],...,Tr[t_n])$
- תרגום נוסחאות:
  1. $Tr[p(t_1,...,t_n)] = p(Tr[t_1],...,Tr[t_n])$
  2. $Tr[\neg\varphi] = \neg Tr[\varphi]$
  3. $Tr[\varphi \circ \psi] = Tr[\varphi] \circ Tr[\psi]$
  4. $Tr[\forall x^s \varphi] = \forall Tr[x^s].S(Tr[x^s]) \rightarrow Tr[\varphi]$
  5. $Tr[\exists x^s \varphi] = \exists Tr[x^s].S(Tr[x^s]) \wedge Tr[\varphi]$

שימו לב: $\exists, \wedge$ לעומת $\forall, \rightarrow$.
עבור תורה T: $Tr[T] = \{Tr[\psi] \mid \psi \in T\}$.

<u>משפט:</u>(ללא הוכחה בכיתה)
אם σ סיגנטורה רב-סוגית ו-$T \cup \{\varphi\}$ קבוצת נוסחאות בשפה המתאימה אז $T \vdash^t_{FOL(\sigma)} \varphi$ אמם $Th(\sigma) \cup Tr(T) \vdash^t_{FOL(\sigma')} Tr(\varphi)$.

<u>תרגיל 1:</u> להצרין משפט ממתימטיקה בדידה: אם ל-$f : s \rightarrow s$ יש פונקציה הפוכה (משמאל) אז f חח"ע.

שפה מסדר שני (נוסחא זו אינה חוקית בשפה רב-סוגית - מדוע?):

$$\forall f[\exists g \forall x(g(f(x)) = x) \rightarrow \forall x \forall y[f(x) = f(y) \rightarrow x = y]]$$

נשתמש בשפה דו-סוגית. הסוגים: s עבור עצמים ו-$s \rightarrow s$ עבור פונקציות. נשתמש במשתנים $x^s, y^s, f^{s\rightarrow s}, g^{s\rightarrow s}$.

נוסיף סימן פונקציה חדש $Ap:((s\to s)\times s)\to s$, כשהמובן של $Ap(f^{s\to s},x^s)$
צריך להיות הפעלת $f^{s\to s}$ על x^s.

$$\varphi=\forall f^{s\to s}[\exists g^{s\to s}\forall x^s(Ap(g^{s\to s},Ap(f^{s\to s},x^s))=x^s)\to\forall x^s\forall y^s[Ap(f^{s\to s},x^s)=Ap(f^{s\to s},y^s)\to x^s=y^s]]$$

תרגום לשפה מסדר ראשון:

נוסיף סימני יחס חד-מקומיים F ו-S:

$$Tr(\varphi)=\forall f[F(f)\to\exists g[F(g)\wedge\forall x[S(x)\to Ap(g,Ap(f,x))=x]]\to$$
$$\to\forall x\forall y[S(x)\wedge S(y)\to[Ap(f,x)=Ap(f,y)\to x=y]]]$$

יש להוסיף גם

$$Ax=\forall f\forall x[F(f)\wedge S(x)\to S(Ap(f,x))]$$

שימו לב שבמקרה הזה $Ax\to Tr(\varphi)$ תקפה לוגית בלוגיקה מסדר ראשון עם שויון,
הוכחה - בעזרת משפט הרברנד או בעזרת $NDFOL=$ - תרגיל בית!

אבל $Ax\to Tr(\varphi)$ לא תמיד תקפה לוגית! נראה דוגמא נגדית:

הצרנה בשפה מסדר שני:

$$\forall f\forall g\exists h\forall x[h(x)=f(g(x))]$$

במקרה זה $Ax\to Tr(\varphi)$ אינה תקפה לוגית - מדוע?

<u>תרגיל 2</u> (מבחינה) הצרינו בשפה מסדר ראשון מתאימה:
כל יחס טרנזיטיבי וסימטרי על קבוצה A הוא גם רפלקסיבי.

טבעי להתחיל מהצרנה בלוגיקה דו סוגית.
הסוגים: r - עבור יחסים בינאריים, s - עבור עצמים.
נשתמש במשתנים: x^s,y^s,z^s,R^r.
סימן יחס $Hold:s\times s\times r\to o$

הצרנה בלוגיקה דו-סוגית:
נוסחא שאומרת שהיחס R טרנזיטיבי:

$$Trans(R^r)=\forall x^s\forall y^s\forall z^s Hold(x^s,y^s,R^r)\wedge Hold(y^s,z^s,R^r)\to Hold(x^s,z^s,R^r)$$

נוסחא שאומרת שהיחס R סימטרי:

$$Sym(R^r)=\forall x^s\forall y^s(Hold(x^s,y^s,R^r)\to Hold(y^s,x^s,R^r))$$

נוסחא שאומרת שהיחס R רפלקסיבי:

$$Refl(R^r)=\forall x^s Hold(x^s,x^s,R^r)$$

$$\varphi=\forall R^r(Trans(R^r)\wedge Sym(R^r)\to Refl(R^r))$$

תרגום לשפה מסדר ראשון:
נוסיף פרדיקטים חד-מקומיים s ו-r המתאיים לסוגים s ו-r בהתאמה.

$$Tr[x^s] = x, Tr[y^s] = y, Tr[z^s] = z, Tr[R^r] = R$$

$$Tr[Trans(R^r)] = \forall x(s(x) \to (\forall y(s(y) \to (\forall z s(z) \to$$

$$Hold(x, y, R) \wedge Hold(y, z, R) \to Hold(x, z, R)))))$$

$$\equiv \forall x \forall y \forall z(s(x) \wedge s(y) \wedge s(z) \wedge Hold(x, y, R) \wedge Hold(y, z, R) \to Hold(x, z, R))$$

$$Tr[Sym(R^r)] = \forall x(s(x) \to \forall y(s(y) \to Hold(x, y, R) \to Hold(y, x, R)))$$

$$\equiv \forall x \forall y(s(x) \wedge s(y) \wedge Hold(x, y, R) \to Hold(y, x, R))$$

$$Tr[Refl(R^r)] = \forall x(s(x) \to Hold(x, x, R))$$

$$Tr[\varphi] = \forall R(r(R) \to (Tr[Trans(R^r)] \wedge Tr[Sym(R^r)] \to Tr[Refl(R^r)]))$$

$$Ax = \forall x \forall y \forall z(Hold(x, y, z) \to s(x) \wedge s(y) \wedge R(z))$$

ההצרנה המלאה: $Ax \to Tr[\varphi]$