לוגיקה למדעי המחשב - תרגול מס' 10

סקולמיזציה, משפט הרברנד ושימושיו

תרגיל 1: נוכיח את הטענה שהשתמשנו בה בהוכחת משפט הרברנד:
יהי $M =< H(L), I >$ מבנה הרברנד עבור שפה L, v השמה במבנה. אז $M, v \models \forall x\varphi$ אמם לכל ש"ס (שם עצם סגור) s שחופשי להצבה במקום x ב-φ מתקיים $M, v \models \varphi\{s/x\}$.
הוכחה:
$(\Leftarrow)$: יהי s חופשי להצבה במקום x ב-φ. הוכחנו בתרגיל בית: $\forall x\varphi \vdash^t_{FOL} \varphi\{s/x\}$.
לכן אם $M, v \models \forall x\varphi$ אז $M, v \models \varphi\{s/x\}$ לכל ש"ס s שחופשי להצבה במקום x ב-φ.
שימו לב שזה נכון לכל מבנה M ולא רק מבנה הרברנד.

$(\Rightarrow)$: נניח $M, v \models \varphi\{s/x\}$ לכל ש"ס s שחופשי להצבה במקום x ב-φ. תהי v' x-ואריאנט של v ונניח $s = v'[x]$.
בהרצאה הוכחנו את הטענה הבאה עבור מבנה הרברנד M:

$$M, v \models \varphi \Leftrightarrow M, v \models \varphi\{v[x]/x\}$$

לכן $M, v' \models \varphi$ אמם $M, v' \models \varphi\{s/x\}$. מכיוון ש-$s$ ש"ס ו-x חופשי להצבה, $M, v' \models \varphi\{s/x\}$ אמם $M, v \models \varphi\{s/x\}$.
מהנתון נובע ש-$M, v' \models \varphi$ לכל v' x-ואריאנט של v ולכן $M, v \models \forall x\varphi$.

נאמר שלפסוק A (תורה T) בשפה L יש מודל הרברנד אם קיים מבנה הרברנד עבור L שמספק את A (T).

תרגיל 2: הוכח או הפרך: לכל פסוק ספיק (במובן FOL) בשפה L שיש בה לפחות קבוע אחד, יש מודל הרברנד $M =< H(L), I >$.

לא נכון, והדוגמא הנגדית: בהינתן שפה L בעלת סיגנטורה שכוללת קבוע c וסימן יחס p בלבד, הפסוק $\exists x(p(x) \wedge \neg p(c))$ ספיק, אבל אין לו מודל הרברנד.

הטענה המתוקנת: לכל פסוק אוניברסלי ספיק (במובן FOL) בשפה L שיש בה לפחות קבוע אחד, יש מודל הרברנד.
הוכחה: יהי A פסוק אוניברסלי ספיק (במובן FOL) בשפה L שיש בה לפחות קבוע אחד. אז לפי משפט הרברנד, קבוצת האינסטנציות הסגורות של המטריצה של A ספיקה במובן CPL. בהינתן השמה פסוקית v שמספקת אותה, נבנה מודל הרברנד $M =< H(L), I >$ עבור A באופן הבא:

$$v[p(s_1, ..., s_n)] = t \Leftrightarrow < s_1, ..., s_n > \in I[p]$$

יש לבדוק שזהו אכן מודל של A.

הכללת הטענה: אם לתורה של פסוקים אוניברסליים T בשפה L שיש בה לפחות קבוע אחד, יש מודל אז יש לה מודל הרברנד.

מעניין שעבור תורה T של פסוקים אוניברסליים בשפה L שכוללת לפחות קבוע אחד, דומיין הרברנד עבור L תמיד מספיק עשיר כדי לייצג כל דומיין אחר, וכשאנו בודקים ספיקות של T, במקום לחפש מודל כללי, מספיק להגביל את עצמינו לבדיקת קיומו של מודל הרברנד עבור T. העובדה שמבני הרברנד מספיקים לאפיין ספיקות של תור-ות אוניברסליות משמשת להוכחת משפט בעל חשיבות רבה שיוזכר גם בהרצאה:

<u>משפט לוונהיים סקולם הפשוט:</u> אם לתורה T יש מודל, אז יש לה מודל בן מניה.

<u>תרגיל 3:</u> השתמש במשפט הרברנד להראות שמתקיים

$$\vdash_{FOL} \forall\epsilon\exists\delta\forall x p(\epsilon,\delta,x) \rightarrow \forall\epsilon\forall x\exists\delta p(\epsilon,\delta,x)$$

שיטה א' (לא יעילה):

נדאג כבר בהתחלה שכל הכמתים יהיו על משתנים שונים - בעזרת כלל α (יש לבדוק שכל התנאים להפעלתו מתקיימים):

$$\forall\epsilon\exists\delta\forall x p(\epsilon,\delta,x) \rightarrow \forall\epsilon\forall x\exists\delta p(\epsilon,\delta,x) \equiv \underbrace{\forall\epsilon\exists\delta\forall x p(\epsilon,\delta,x) \rightarrow \forall\epsilon'\forall x'\exists\delta' p(\epsilon',\delta',x')}_{\varphi_1}$$

$\vdash_{FOL} \varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2 = \neg\varphi_1$ אינה ספיקה
נמצא צורה פרנקסית נורמלית ל-φ_2:

$$\varphi_2 = \neg(\forall\epsilon\exists\delta\forall x p(\epsilon,\delta,x) \rightarrow \forall\epsilon'\forall x'\exists\delta' p(\epsilon',\delta',x')) \equiv \forall\epsilon\exists\delta\forall x p(\epsilon,\delta,x) \wedge \neg\forall\epsilon'\forall x'\exists\delta' p(\epsilon',\delta',x')$$

$$\equiv \forall\epsilon\exists\delta\forall x p(\epsilon,\delta,x) \wedge \exists\epsilon'\neg\forall x'\exists\delta' p(\epsilon',\delta',x') \equiv \forall\epsilon\exists\delta\forall x p(\epsilon,\delta,x) \wedge \exists\epsilon'\exists x'\neg\exists\delta' p(\epsilon',\delta',x')$$

$$\equiv \forall\epsilon\exists\delta\forall x p(\epsilon,\delta,x) \wedge \exists\epsilon'\exists x'\forall\delta'\neg p(\epsilon',\delta',x') \equiv \underbrace{\exists\epsilon'\exists x'\forall\epsilon\forall\delta'\exists\delta\forall x(p(\epsilon,\delta,x) \wedge \neg p(\epsilon',\delta',x'))}_{\varphi_3}$$

כעת נבצע סקולמיזציה של φ_3:

$$Sk(\varphi_3) = \forall\epsilon\forall\delta'\forall x(p(\epsilon,f(\epsilon,\delta'),x) \wedge \neg p(a,\delta',b))$$

לפי משפט הרברנד, $Sk(\varphi_3)$ ספיקה אמם T^* - קבוצת האינסטנציות הסגורות של המטריצה של $Sk(\varphi_3)$ ספיקה. מרחב הרברנד:

$$\{a,b,f(a,a),f(a,b),f(b,a),f(b,b),f(a,f(a,a)),...\}$$

$$T^* = \{p(a,f(a,a),a) \wedge \neg p(a,a,b), p(b,f(a,a),a) \wedge \neg p(a,a,b),...\}$$

הקבוצה T^* מכילה תת-קבוצה לא ספיקה:
$\{p(a,f(a,b),b) \wedge \neg p(a,b,b), p(a,f(a,f(a,b)),a) \wedge \neg p(a,f(a,b),b)\}$ עבור ההצבות $\{a/\epsilon,b/\delta',b/x\}$ ו-$\{a/\epsilon,f(a,b)/\delta',a/x\}$. לכן T^* אינה ספיקה.

שיטה ב' (יעילה יותר): $\vdash_{FOL} \forall\epsilon\exists\delta\forall x p(\epsilon,\delta,x) \rightarrow \forall\epsilon\forall x\exists\delta p(\epsilon,\delta,x)$ אמם
$\forall\epsilon\exists\delta\forall x p(\epsilon,\delta,x) \vdash_{FOL} \forall\epsilon\forall x\exists\delta p(\epsilon,\delta,x)$ אמם
$T = \{\forall\epsilon\exists\delta\forall x p(\epsilon,\delta,x), \neg\forall\epsilon\forall x\exists\delta p(\epsilon,\delta,x)\}$ אינה ספיקה אמם
$Prenex(T) = \{\forall\epsilon\exists\delta\forall x p(\epsilon,\delta,x), \exists\epsilon\exists x\forall\delta\neg p(\epsilon,\delta,x)\}$ אינה ספיקה אמם
$Sk(Prenex(T)) = \{\forall\epsilon\forall x p(\epsilon,f(\epsilon),x), \forall\delta\neg p(a,\delta,b)\}$ אינה ספיקה

מרחב הרברנד: $\{a, b, f(a), f(b), f(f(a)), f(f(b)), ...\}$

קבוצת האינסטנציות הסגורות של איברי $Sk(Prenex(T))$:

$$T^* = \{p(a,f(a),a), p(a,f(a),b), p(b,f(b),a), p(b,f(b),b), ...\}\cup$$
$$\cup\{\neg p(a,a,b), \neg p(a,b,b), \neg p(a,f(a),b), ...\}$$

T^* מכילה תת-קבוצה לא ספיקה $\{p(a,f(a),b), \neg p(a,f(a),b)\}$ ולכן אינה ספיקה.