תרגיל 4 שאלה 3:

1. $\Psi = \forall x\exists y(\exists z\forall xR(x,z,w) \wedge \exists wP(w,x,z))$.

(א) $\Psi\{f(x,y)/x, x/y, f(y,y)/z, w/w\}$: $f(y,y)$ אינו חופשי להצבה במקום z ב-Ψ. נשנה את השם של המשתנה הקשור y ל-y_1 ב-Ψ (בדקו בהגבלות על כלל α מדוע מותר לעשות זאת) ונקבל:
$\Psi' = \forall x\exists y_1(\exists z\forall xR(x,z,w) \wedge \exists wP(w,x,z))$.
כל שאר ההצבות מותרות ולכן נקבל:
$\Psi'\{f(x,y)/x, x/y, f(y,y)/z, w/w\} = \forall x\exists y_1(\exists z\forall xR(x,z,w) \wedge \exists wP(w,x,f(y,y)))$.

(ב) $\Psi\{f(z,w)/x, y/y, f(z,z)/z, f(w,s)/w\}$ - כל ההצבות מותרות ולכן נקבל:
$\Psi\{f(z,w)/x, y/y, f(z,z)/z, f(w,s)/w\} =$
$\forall x\exists y(\exists z\forall xR(x,z,f(w,s)) \wedge \exists wP(w,x,f(z,z)))$.

(ג) $\Psi\{f(s,w)/x, f(s,w)/y, f(s,w)/z, f(s,w)/w\}$ - $f(s,w)$ אינו חופשי להצבה במקום z ב-Ψ. נשנה את השם של המשתנה הקשור w ל-w_1 ב-Ψ. נקבל:
$\Psi' = \forall x\exists y(\exists z\forall xR(x,z,w) \wedge \exists w_1P(w_1,x,z))$.
כל שאר ההצבות מותרות ולכן נקבל:
$\Psi'\{f(s,w)/x, f(s,w)/y, f(s,w)/z, f(s,w)/w\} =$
$\forall x\exists y(\exists z\forall xR(x,z,f(s,w)) \wedge \exists w_1P(w_1,x,f(s,w)))$.

2. ...

3.
- הנוסחא לא תקפה לוגית. יהי p סימן יחס חד-מקומי ונקח מבנה $M =< N, I >$ כאשר $n \in I[p]$ אמם n זוגי ו-$I[c] = 1$. תהיי v השמה המקיימת $v[x] = 2$. אז $M, v \not\models p(x) \to p(c)$. לכן הנוסחא $\forall x(p(x) \to p(c))$ אינה תקפה במבנה.
- הנוסחא תקפה לוגית.
תזכורת של סימון: בהינתן מבנה M והשמה v במבנה, $v(a/x)$ היא x-ואריאנט של v שנותנת ערך $a \in D$ ל-x.
ההוכחה מתחלקת לשני מקרים: עבור $x = y$ ועבור $x \neq y$.
מקרה ראשון: $x = y$. תחילה נוכיח טענה: לכל $a, b \in D$ ולכל השמה v במבנה M: $v(a/x)(b/x) = v(b/x)$ - השלימו את ההוכחה לבד.
יהי M מבנה ו-v השמה כך ש-$M, v \models \exists x\forall xq(x,x)$. אז קיים $a \in D$ כך ש-$M, v(a/x) \models \forall xq(x,x)$. אז לכל $b \in D$: $M, v(b/x) \models q(x,x)$. אז לכל $b \in D$: $M, v(b/x) \models \exists xq(x,x)$ (מכיוון ש-$v(b/x)$ היא x-ואריאנט של עצמה). אז $M, v \models \forall x\exists xq(x,x)$.

מקרה שני: $x \neq y$. תחילה יש להוכיח שבמקרה כזה לכל $a, b \in D$ ולכל השמה v במבנה M:
$v(a/x)(b/y) = v(b/y)(a/x)$ $(*)$ - השלימו את ההוכחה לבד.
יהי M מבנה ו-v השמה כך ש:

$M,v\models\exists y\forall xq(x,y)$. אז קיים $a\in D$ כך ש-$M,v(a/y)\models\forall xq(x,y)$. אז לכל $b\in D$, $M,v(a/y)(b/x)\models q(x,y)$.
אז לפי $(*)$, לכל $b\in D$: $M,v(b/x)(a/y)\models q(x,y)$.
לכן לכל $b\in D$: $M,v(b/x)\models\exists yq(x,y)$. אז $M,v\models\forall x\exists yq(x,y)$.

- הנוסחא לא תקפה לוגית. יהי q סימן יחס דו-מקומי ונקח מבנה $M=<N,I>$ כאשר $I[q]=<$. אז לכל השמה v במבנה מתקיים: $M,v\models\forall x\exists yq(x,y)$ וגם $M,v\not\models\exists y\forall xq(x,y)$.