פתרון תרגיל מס' 3

נתונה קבוצה A כלשהי. נגדיר קבוצת פסוקים T_A ונוכיח שהיא ספיקה אמם A דו-קהילתית:

- הפסוקים האטומיים:
  - לכל $a,b\in A$ יהיה לנו פסוק אטומי q_{ab} כאשר הכוונה ש-q_{ab} יסתפק אמם a,b שכנים.
  - לכל $a\in A$ יהיו לנו פסוקים אטומיים p_a^1,p_a^2 כאשר הכוונה ש-p_a^i יסתפק אמם $a\in A_i$, $i\in\{1,2\}$.
- $T_1=\{q_{ab}\mid a,b\in A\ are\ neighbors\}\cup\{\neg q_{ab}\mid a,b\in A\ are\ not\ neighbors\}$
- $T_2=\{p_a^1\wedge p_b^1\rightarrow q_{ab}\mid a,b\in A\}$ - הקבוצה נועדה להבטיח ש-A_1 תהיה קהילה.
- $T_3=\{p_a^2\wedge p_b^2\rightarrow q_{ab}\mid a,b\in A\}$ - הקבוצה נועדה להבטיח ש-A_2 תהיה קהילה.
- $T_4=\{p_a^1\vee p_a^2\mid a\in A\}$ - הקבוצה נועדה להבטיח ש-$A=A_1\cup A_2$.
- $T_A=T_1\cup T_2\cup T_3\cup T_4$.

<u>טענה:</u> A דו-קהילתית אמם T_A ספיקה.
הוכחה:
$(\Leftarrow)$: נניח ש-A דו-קהלתית. אז קיימות שתי קהילות $A_1\subseteq A, A_2\subseteq A$ כך ש-$A_1\cup A_2=A$.
נגדיר השמה v שתספק את T_A בצורה הבאה. תהי v השמה שלכל $a,b\in A$ מקיימת:

$$v(p_a^1)=t\Leftrightarrow a\in A_1$$

$$v(p_a^2)=t\Leftrightarrow a\in A_2$$

$$v(q_{ab})=t\Leftrightarrow a,b\ are\ neighbors$$

נשאר להראות ש-$T_A\models v$. יהי $\psi\in T_A$. אז אחת האפשרויות מתקיימת:

1. $\psi\in T_1$. אם $\psi=q_{ab}$ עבור $a,b\in A$ שכנים, אז לפי הגדרת v, $v(q_{ab})=t$. אחרת $\psi=\neg q_{ab}$ עבור $a,b\in A$ שאינם שכנים. מכיוון ש-$v(q_{ab})=f$, $v(\neg q_{ab})=t$.
2. $\psi\in T_2$. אז $\psi=p_a^1\wedge p_b^1\rightarrow q_{ab}$ עבור $a,b\in A$ כלשהם. אם a,b אינם שכנים אז $v(q_{ab})=f$. מכיוון ש-A_1 קהילה, לא ייתכן שגם a וגם b נמצאים בה. לכן $v(p_a^1\wedge p_b^1)=f$ ולכן v מספקת את ψ. אחרת a,b שכנים ו-$v(q_{ab})=t$. גם במקרה הזה v מספקת את ψ.
3. $\psi\in T_3$. הוכחה סימטרית למקרה הקודם.
4. $\psi\in T_4$. אז $\psi=p_a^1\vee p_a^2$ עבור $a\in A$ כלשהו. מכיוון ש-$A=A_1\cup A_2$, $a\in A_1$ או $a\in A_2$ ולכן $v(p_a^1)=t$ או $v(p_a^2)=t$. לכן v מספקת את ψ.

$(\Rightarrow)$:

נניח ש-T_A ספיקה. נוכיח ש-A היא דו-קהילתית.
תהי v השמה שמספקת את T_A. נגדיר שתי תת-קבוצות A_1, A_2 של A באופן הבא:

$$A_i = \{a \in A \mid v(p_a^i) = t\},\ i \in \{1, 2\}$$

יהי $a \in A$ כלשהו. מכיוון ש-$p_a^1 \vee p_a^2 \in T_A$, $v(p_a^1 \vee p_a^2) = t$. לכן $a \in A_1$ או $a \in A_2$.
יהיו $a, b \in A_1$. אז $v(p_a^1) = v(p_b^1) = t$. מכיוון ש-$p_a^1 \wedge p_b^1 \to q_{ab} \in T_A$, $v(p_a^1 \wedge p_b^1 \to q_{ab}) = t$ ולכן $v(q_{ab}) = t$. מכיוון שלכל $a', b' \in A$ שאינם שכנים $\neg q_{a'b'} \in T_A$ ולכן $v(q_{a'b'}) = f$ מתקבל ש-a, b בהכרח שכנים.
באופן סימטרי אפשר להראות שלכל $a, b \in A_2$: a, b הם שכנים.
הראינו ש-A דו-קהילתית.

כעת נוכיח את הטענה: A דו-קהילתית אמם כל תת-קבוצה סופית של A היא דו-קהילתית.

$(\Leftarrow)$:

נניח A קבוצה דו-קהילתית. נוכיח: כל תת-קבוצה סופית של A היא דו-קהילתית.
A דו-קהילתית $\Leftarrow$ T_A שבנינו למעלה היא ספיקה. לפי משפט הקומפקטיות, כל תת-קבוצה סופית של T_A היא ספיקה.
תהי A' תת-קבוצה סופית של A. נבנה את הקבוצה $T_{A'}$ באופן שהוסבר קודם. לפי הטענה שהוכחנו, A' דו-קהילתית אמם $T_{A'}$ ספיקה.
קל לראות (בדקו!) ש-$T_{A'}$ היא תת-קבוצה של T_A ושהינה סופית. לכן $T_{A'}$ ספיקה.
מכאן נובע ש-A' דו-קהילתית.

$(\Rightarrow)$:

נניח שכל תת-קבוצה של A היא דו-קהילתית. נוכיח ש-A היא דו-קהילתית.
תהי T_A קבוצת פסוקים שמוגדרת כמו מקודם. יש להראות שהיא ספיקה.
תהי T' תת-קבוצה סופית של T_A. נגדיר את הקבוצה A' באופן הבא:

$$A' = \{a \in A \mid p_a^2 \ or\ p_a^1\ appears\ in\ some\ formula\ in\ T'\}$$

קל לראות (בדקו!) ש-A' היא תת-קבוצה סופית של A. מכאן שהיא דו-קהילתית. אז קיימות שתי תת-קבוצות $A_1' \subseteq A', A_2' \subseteq A'$ שהן קהילות ו-$A_1' \cup A_2' = A'$.
תהי v השמה המקיימת:
לכל $a, b \in A$: $v(q_{ab}) = t \Leftrightarrow a, b$ שכנים
לכל $a \in A'$: $v(p_a^1) = t \Leftrightarrow a \in A_1'$; $v(p_a^2) = t \Leftrightarrow a \in A_2'$

נראה ש-v מספקת את T': יהי $\psi \in T'$. מכיוון ש-$T' \subseteq T_A$, ייתכנו האפשרויות הבאות:

- $\psi = q_{ab}$ עבור $a, b \in A$ שכנים. לפי הגדרת v, $v(q_{ab}) = t$.
- $\psi = \neg q_{ab}$ עבור $a, b \in A$ שאינם שכנים. לפי הגדרת v, $v(q_{ab}) = f$ ולכן $v(\neg q_{ab}) = t$.
- $\psi = p_a^1 \wedge p_b^1 \to q_{ab}$ עבור $a, b \in A$. מכיוון ש-p_a^1, p_b^1 מופיעים ב-T', $a, b \in A'$. אם $a, b \in A_1'$, אז $v(p_a^1) = t, v(p_b^1) = t$ ולכן $v(p_a^1 \wedge p_b^1) = t$. מכיוון ש-$A_1'$ קהילה,

a, b שכנים ולכן $v(q_{ab}) = t$. לכן $v(\psi) = t$.
אחרת $v(p_a^1 \wedge p_b^1) = f$ ו-$v(\psi) = t$.

- $\psi = p_a^2 \wedge p_b^2 \rightarrow q_{ab}$ עבור $a, b \in A$. באופן סימטרי לסעיף הקודם.
- $\psi = p_a^1 \vee p_a^2$ עבור $a \in A$. מכיוון ש-p_a^1 מופיע ב-T', $a \in A'$. מכיוון ש-A' דו-קהילתית, $a \in A_1'$ או $a \in A_2'$. לפי הגדרת v, $v(p_a^1 \vee p_a^2) = t$.

הראינו שכל תת-קבוצה סופית של T_A ספיקה. לפי משפט הקומפקטיות, T_A ספיקה. לפי טענה שהוכחנו קודם לכן, T_A ספיקה אמם A דו-קהילתית.