לוגיקה למדעי המחשב - תרגיל מס' 8

1. (א) מצא צורה פרנקסית נורמאלית לפסוקים הבאים:

   i. $(\forall x(p(x) \to \exists y q(x,y)) \wedge \forall x(\neg p(x) \to \neg \exists y q(x,y)))$

   ii. $\forall x(\forall y \exists z p(x,y,z)) \to \forall x r(x)$

   iii. $\forall x \exists y \forall z((\forall x p(x) \to q(x, f(y), z)) \wedge \neg \forall z \exists x \neg r(g(x,z), z))$

   (ב) השתמש בסקולמיזציה על מנת למצוא פסוקים אוניברסליים שספיקים אמם הפסוקים שמצאת בסעיף קודם ספיקים.

2. בהרצאה ראינו אלגוריתם סקולמיזציה שמקבל פסוק A ובונה פסוק אוניברסלי A' כך ש-A ספיק אמם A' ספיק.

   (א) הראה אלגוריתם שמקבל נוסחא כלשהי ψ ובונה פסוק אוניברסלי ψ' שספיק אמם ψ v-ספיקה.

   (ב) הפעל את האלגורתים על הנוסחא:

$$\forall z \exists u[[(p(x,y) \wedge \exists w r(z,w,y)) \to \forall v q(x, f(h(z)), v)] \wedge \forall w \forall v[\neg r(y, g(v), z) \vee p(h(w), u)]]$$

3. (שאלה ממבחן) תהי Γ קבוצת פסוקים ו-$\forall x \forall y \exists z \psi(x,y,z)$ פסוק בשפה L, כך שמתקיים $\Gamma \vdash_{FOL} \forall x \forall y \exists z \psi(x,y,z)$. יהי φ פסוק ב-L ו-f סימן פונקציה דו-מקומי שאינו ב-L. תן הוכחה מלאה שאם $\Gamma \cup \{\forall x \forall y \psi(x,y,f(x,y))\} \vdash_{FOL} \varphi$ אז $\Gamma \vdash_{FOL} \varphi$.

4. (שאלה ממבחן) להלן רשימת טענות:

   1. כל שני סטודנטים שונים רשומים לקורס אחד משותף לפחות.
   2. לכל קורס רשומים לפחות שני סטודנטים.
   3. כל סטודנט לוקח לפחות קורס אחד.

   (א) הצרן את הטענות בשפה מסדר ראשון עם שויון בעלת סיגנטורה מתאימה.

   (ב) בנה תורה אוניברסלית T של פסוקים (כולל אקסיומות שויון מתאימות) כך שטענה 3 נובעת לוגית מטענות 1-2 אמ"ם T אינה ספיקה.

   (ג) הוכח או הפרך: טענה 3 נובעת לוגית מטענות 1-2.