

לוגיקה למדעי המחשב - תרגיל מס' 7

1. תהי L שפה ו- A נוסחה ב- L . הוכח או הפרך: A ספיקה אמ"ם היא ספיקה במבנה הרברנד עבור L .

2. (שאלה ממבחן) יהי $\Sigma = \{R_1(), R_2(), c\}$. הוכח או הפרך:

- (א) קיימת נוסחה ספיקה A ב- Σ שאינה ספיקה באף מבנה אינסופי.
- (ב) קיימת נוסחה A ב- Σ כך ש- A ספיקה רק במבנים בגודל גדול מ-20.
- (ג) קיימת נוסחה A ב- Σ כך ש- A ספיקה רק במבנים בגודל גדול מ-2.

3. (שאלה ממבחן) נתונה שפה L מסדר ראשון (ללא שויון) בעלת סיגנטורה הכוללת רק n סימני יחס חד-מקומיים p_1, p_2, \dots, p_n . בהינתן מבנה $M = \langle D, I \rangle$ עבור L , נגדיר יחס \sim^M על D באופן הבא:

$$b \in I[p_i] \Leftrightarrow a \in I[p_i] : 1 \leq i \leq n \text{ כאשר } a \sim^M b$$

- (א) הראה כי לכל מבנה M עבור L , \sim^M הוא יחס שקילות בעל לכל היותר 2^n מחלקות שקילות.
- (ב) הוכח או הפרך: קיים פסוק בשפה L שספיק רק במבנה בעל 2^n איברים ואינו ספיק במבנה בעל פחות מ- 2^n איברים.
- (ג) הוכח: נוסחה A בשפה L היא t -ספיקה אמ"ם קיים עבורה t -מודל בעל לכל היותר 2^n איברים. תן הוכחה מלאה.
רמז: היעזר בסעיף א'.

4. (שאלה ממבחן) הוכח או הפרך על ידי דוגמא את הטענות הבאות.

(א) תהי A נוסחה כך ש- $Fv[A] = \{x, y\}$. אז לכל שני קבועים שונים d_1, d_2 שאינם מופיעים ב- A : $A : A$ ספיקה אמ"ם $A\{d_1/x, d_2/y\}$ ספיקה.

(ב) $\forall x \forall y (P(x) \rightarrow P(y)) \vdash_{FOL} \exists x \forall y (P(x) \leftrightarrow P(y))$

(ג) $\vdash_{FOL} \forall x (p(x) \vee \exists y q(x, y)) \rightarrow \exists y \forall x (p(x) \vee q(x, y))$

(ד) לכל מבנה הרברנד $M : M$ הוא v -מודל של נוסחה $\forall x \exists y A \rightarrow \exists z B$ אמ"ם M הוא v -מודל של הנוסחה $\exists z B$ או M אינו v -מודל של הנוסחה $\forall x \exists y A$.