

לוגיקה למדעי המחשב - תרגיל מס' 6

1. (שאלה ממבחן) מבנה $M_1 = \langle D_1, I_1 \rangle$ עבור שפה $L(\sigma)$ הוא תת-מבנה של מבנה $M_2 = \langle D_2, I_2 \rangle$ עבור $L(\sigma)$ אם התנאים הבאים מתקיימים:

- $D_1 \subseteq D_2$
- לכל קבוע c של $L(\sigma)$ $I_1[c] = I_2[c]$
- לכל סימן פונקציה n -מקומי f של $L(\sigma)$ ולכל $a_1, \dots, a_n \in D_1$:
 $I_1[f][a_1, \dots, a_n] = I_2[f][a_1, \dots, a_n]$
- לכל סימן יחס n -מקומי p של $L(\sigma)$ ולכל $a_1, \dots, a_n \in D_1$:
 $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in I_1[p] \iff \langle a_1, \dots, a_n \rangle \in I_2[p]$

יהיו M_1, M_2 מבנים עבור שפה $L(\sigma)$, כך ש- M_1 הוא תת-מבנה של M_2 . הוכח או הפרך על ידי דוגמא נגדית:

- (א) לכל פסוק A : אם $M_1 \models A$ אז $M_2 \models A$
- (ב) לכל פסוק A : אם $M_2 \models A$ אז $M_1 \models A$
- (ג) לכל פסוק $\exists x\psi$, כך ש- ψ נוסחה ללא כמתים: אם $M_2 \models \exists x\psi$ אז $M_1 \models \exists x\psi$
- (ד) לכל פסוק אוניברסלי A : אם $M_2 \models A$ אז $M_1 \models A$

2. הוכח או הפרך: אם A פסוק, אז $T \cup \{A\} \vdash_{HFOL} B$ אם $T \vdash_{HFOL} A \rightarrow B$.

3. (שאלת בונוס) המערכת S מתקבלת מ- $HFOL$ על ידי כך שנחליף את כלל הה-כללה ואת האקסיומות

$$\forall x(B \rightarrow A) \rightarrow (\exists xB \rightarrow A)$$

$$\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall xB)$$

כאשר $x \notin FV(A)$ בשני הכללים הבאים:

$$\frac{A \rightarrow C}{\exists xA \rightarrow C} \quad \frac{C \rightarrow A}{C \rightarrow \forall xA}$$

בתנאי ש- x אינו חופשי ב- C . הוכח ש- S שקולה ל- $HFOL$.

4. כמה מבני הרברנד קיימים עבור שפה בעלת סיגנטורה הכוללת 4 קבועים ושני סימני יחס חד-מקומיים?

5. הוכח שלכל מבנה הרברנד M והשמה v : $M, v \models \exists x\varphi$ אם קיים ש"ס t , כך ש: $M, v \models \varphi\{t/x\}$. האם הטענה נכונה עבור M כלשהו?