

לוגיקה למדעי המחשב - תרגיל מס' 4

1. ציין לגבי כל אחד ממופעי המשתנים האם הוא חופשי או קשור:

$$\forall x_1 \forall x_3 (p(x_1, x_2) \rightarrow q(x_3)) \quad (\text{א})$$

$$\forall x_2 (p(f(x_2)) \rightarrow \forall x_3 q(x_1, x_2, x_3)) \quad (\text{ב})$$

$$(\neg \neg p(x_2) \wedge \forall x_5 p(x_2)) \wedge \forall x_2 p(x_2) \quad (\text{ג})$$

$$[\forall x_1 (r(x_1, x_3) \wedge \exists x_1 r(x_2, x_3))] \vee [\exists x_1 \forall x_1 (r(x_2, x_5) \rightarrow \exists x_4 r(x_1, x_4))] \quad (\text{ד})$$

2. רשום את $A\{s/x\}$ עבור המקרים הבאים וציין האם s חופשי להצבה במקום x ב- A :

$$.s = g(f(w), w), A = (\forall x p(x, y)) \wedge q(z, f(x), g(x, y)) \quad (\text{א})$$

$$.s = g(f(w), w), A = \forall x (p(x, y) \wedge q(z, f(x), g(x, y))) \quad (\text{ב})$$

$$.s = g(f(w), y), A = \forall w \exists y (p(x, y) \wedge q(z, f(x), g(x, y))) \quad (\text{ג})$$

$$.s = g(f(w), z), A = (\forall w p(x, y)) \wedge \exists z (q(z, f(x), g(x, y))) \quad (\text{ד})$$

3. נתונה הנוסחה הבאה: $\Psi = \forall x \exists y (\exists z \forall x R(x, z, w) \wedge \exists w P(w, x, z))$. בצע שינוי שמות משתנים קשורים היכן שצריך, וכתוב את תוצאת ההצבה.

$$\Psi\{f(x, y)/x, x/y, f(y, y)/z, w/w\} \quad (\text{א})$$

$$\Psi\{f(z, w)/x, y/y, f(z, z)/z, f(w, s)/w\} \quad (\text{ב})$$

$$\Psi\{f(s, w)/x, f(s, w)/y, f(s, w)/z, f(s, w)/w\} \quad (\text{ג})$$

4. קבע האם הנוסחאות הבאות תקפות לוגית. הוכח או תן דוגמא נגדית.

$$\forall x (A \rightarrow B) \rightarrow (\exists x A \rightarrow \exists x B) \quad (\text{א})$$

$$\forall x (A \rightarrow B) \rightarrow (\forall x A \rightarrow \forall x B) \quad (\text{ב})$$

$$(\exists x A \wedge \exists x B) \rightarrow \exists x (A \wedge B) \quad (\text{ג})$$

$$x \notin FV(A), \forall x (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall x B) \quad (\text{ד})$$

$$x \notin FV(A), \forall x (A \vee B) \rightarrow (A \vee \forall x B) \quad (\text{ה})$$

$$(\forall x \exists y A) \rightarrow (\exists y \forall x A) \quad (\text{ו})$$

$$(\forall x A) \rightarrow (\exists x A) \quad (\text{ז})$$

$$(\exists x (A \vee B)) \rightarrow (\exists x A \vee \exists x B) \quad (\text{ח})$$

$$(\neg \exists x A) \rightarrow (\forall x \neg A) \quad (\text{ט})$$

$$(\forall x \neg A) \rightarrow (\neg \exists x A) \quad (\text{י})$$

5. הוכח שאם x אינו חופשי ב- A אז לכל מבנה M והשמה v מתקיים:

$$M, v \models (\forall x (B \rightarrow A)) \rightarrow (\exists x B \rightarrow A)$$