סמסטר ב' מועד א' תשס"ז

תאריך הבחינה: 09.07.07

# מבחן בלוגיקה למדעי המחשב


מרצה: אנה זמנסקי

מתרגל: טל לב-עמי


- משך הבחינה 3 שעות.
- אין להשתמש בחומר עזר.
- יש לענות על ארבע מתוך חמש שאלות.
- ניקוד כל שאלה זהה - 25 נקודות.

בהצלחה!

1. תהי $L$ שפה בעלת סיגנטורה הכוללת סימן יחס דו-מקומי $R$.

(א) (5 נק') הצרן את הטענות הבאות:

i. $R$ הוא יחס טרנזיטיבי.

ii. $R$ הוא יחס אי–רפלקסיבי.

iii. $R$ הוא יחס אנטי–סימטרי.

(ב) (12 נק') הוכח בעזרת דדוקציה טבעית או משפט הרברנד או הפרך בעזרת דוגמא נגדית: הטענה השלישית נובעת לוגית משתי הטענות הראשונות.

(ג) (8 נק') נסמן את קבוצת שלושת הפסוקים שקיבלת בסעיף א' ב-$Ax(R)$.

מבנה $M = \langle D, I \rangle$ עבור $L$ ייקרא מבנה מסודר אם $I[R]$ הוא יחס טרנזיטיבי ואי-רפלקסיבי.

נגדיר יחס נביעה חדש בין קבוצות פסוקים לבין פסוקים ב-$L$:

$\Gamma \vdash^{Ord}_{FOL} \psi$ אם לכל מבנה מסודר $M$: $M \models \Gamma$ גורר $M \models \psi$.

הוכח או הפרך: לכל קבוצת פסוקים $\Gamma$ ופסוק $\psi$, $\Gamma \vdash^{Ord}_{FOL} \psi$ אמ"ם $\Gamma \cup Ax(R) \vdash_{FOL} \psi$.

2. (א) (4 נק') הראה כי הנוסחאות $\forall xA$ ו-$\forall yA\{y/x\}$ אינן שקולות לוגית לכל $y$.

(ב) (5 נק') נסח הגבלות מינימליות על $y$ שעבורן הנוסחאות הנ"ל שקולות לוגית.

(ג) (16 נק') נסמן שויון מחרוזות ב-$\sim$ ושקילות לוגית ב-$\equiv$. הוכח או הפרך את הטענות הבאות תחת ההגבלות על $y$ שניסחת בסעיף הקודם.

i. $\forall xA \sim \forall y(A\{y/x\})$

ii. $\forall xA \equiv \forall y(A\{y/x\})$

iii. $(\forall xA)\{y/x\} \sim \forall x(A\{y/x\})$

iv. $(\forall xA)\{y/x\} \equiv \forall x(A\{y/x\})$

יש לתת הוכחה מלאה או דוגמא נגדית.

3. נגדיר מערכת הוכחה חדשה $S$ בתחשיב הפסוקים מעל הקשרים $\{\neg, \to\}$. האקסיומות של $S$ הן $(A \to A)$ ו-$(B \to A) \to (\neg A \to \neg B)$ בלבד, לכל שתי נוסחאות $A, B$ מעל הקשרים $\{\neg, \to\}$.

כלל ההיסק היחיד של $S$ הוא $\dfrac{B, A \to B}{A}$ ($MP$ אינו כלל היסק של $S$).

(א) (8 נק') הוכח או הפרך: המערכת $S$ נאותה ביחס ל-$CPL$, כלומר אם $\Gamma \vdash_S A$, אז $\Gamma \vdash_{CPL} A$.

(ב) (12 נק') לפסוק $A$ מעל הקשרים $\{\neg, \to\}$ נגדיר את הפסוק $A^*$ באופן הבא:

$$p^* = p,\ (\neg A)^* = \neg(A^*),\ (A \to B)^* = B^* \to A^*$$

הוכח או הפרך: אם $A$ משפט של $S$, אז $A^*$ טאוטולוגיה.

(ג) (5 נק') הוכח או הפרך: המערכת $S$ שלמה ביחס ל-$CPL$, כלומר אם $\Gamma \vdash_{CPL} A$, אז $\Gamma \vdash_S A$ (כאשר $\Gamma, A$ מעל $\{\neg, \to\}$).

4. תהי $L_1$ שפה בעלת סיגנטורה הכוללת שני סימני יחס דו-מקומיים $P$ ו-$Q$, סימן פונקציה חד-מקומי $f$ ושני קבועים $c, d$.

תהי $L_n$ שפה בעלת סיגנטורה הכוללת סימן יחס דו-מקומי אחד $R$ ו-$n$ קבועים $c_1, ..., c_n$.

הוכח או הפרך את טענות הבאות:

(א) קיים פסוק $\psi$ ב-$L_1$ שספיק רק במבנים בגודל גדול מ-3.

(ב) קיים פסוק $\psi$ ב-$L_1$ שספיק רק במבנים סופיים.

5. הוכח או הפרך על ידי דוגמא את הטענות הבאות. תשובה לא מנומקת לא תתקבל.

**נסמן** $\psi_\perp = \exists x.\neg(x = x)$.

(א) (5 נק') $T \not\vdash^{t}_{FOL=} \psi_\perp$ אמ"ם ל-$T$ יש $t$-מודל נורמלי.

(ב) (5 נק') $T \not\vdash^{v}_{FOL=} \psi_\perp$ אמ"ם ל-$T$ יש $v$-מודל נורמלי.

(ג) (5 נק') אם פסוק אוניברסלי בשפה $L$ ספיק, אז הוא ספיק במבנה הרברנד עבור $L$.

(ד) (5 נק') $\vdash_{FOL} \forall x(p(x) \vee \exists y q(x,y)) \rightarrow \exists y \forall x(p(x) \vee q(x,y))$

(ה) (5 נק') נתונה שפה $L$ בעלת סיגנטורה הכוללת $n$ קבועים וסימן יחס דו-מקומי $R$ בלבד. קיים אלגוריתם המקבל נוסחה בשפה זו מהצורה $\forall x_1 ... \forall x_n \exists y_1 ... \exists y_m A$, כאשר $A$ ללא כמתים, והמכריע את תקפותה הלוגית של הנוסחה.