

סמסטר קיץ מועד ב' תשס"ה

תאריך הבחינה: 09.12.05

מבחן בלוגיקה למדעי המחשב

המרצה: אנה זמנסקי

- משך הבחינה 3 שעות.
- אין להשתמש בחומר עזר.
- במבחן 4 שאלות. יש לענות על כולן.

בהצלחה!

1. (18 נק') תהיינה A, B נוסחאות כלשהן בתחשיב הפסוקים ו- p - פסוק אטומי.

(א) (9 נק') הוכח או הפרד: אם $\vdash_{CPL} p \rightarrow (A \rightarrow B)$ אז לפחות אחת הטענות

הבאות מתקיימת: $\vdash_{CPL} p \rightarrow B$ או $\vdash_{CPL} p \rightarrow \neg A$.

(ב) (9 נק') חזור על סעיף א' כאשר ידוע ש- p הוא הפסוק האטומי המשותף

היחיד של A ו- B .

2. (35 נק') נתונה שפה L מסדר ראשון (ללא שויון) בעלת סיגנטורה הכוללת רק

n סימני יחס חד-מקומיים p_1, p_2, \dots, p_n . בהינתן מבנה $M = \langle D, I \rangle$ עבור L ,

נגדיר יחס \sim^M על D באופן הבא:

$$b \in I[p_i] \Leftrightarrow a \in I[p_i] : 1 \leq i \leq n \text{ כאשר } a \sim^M b$$

(א) (7 נק') הראה כי לכל מבנה M עבור L , \sim^M הוא יחס שקילות בעל לכל

היותר 2^n מחלקות שקילות.

(ב) (8 נק') הוכח או הפרד: קיים פסוק בשפה L שספיק רק במבנה בעל 2^n

איברים ואינו ספיק במבנה בעל פחות מ- 2^n איברים.

(ג) (20 נק') הוכח: נוסחה A בשפה L היא t -ספיקה אמ"ם קיים עבורה t -מודל

בעל לכל היותר 2^n איברים. תן הוכחה מלאה.

רמז: היעזר בסעיף א'.

3. (22 נק') להלן רשימת טענות:

1. כל שני סטודנטים שונים רשומים לקורס אחד משותף לפחות.

2. לכל קורס רשומים לפחות שני סטודנטים.

3. כל סטודנט לוקח לפחות קורס אחד.

(א) (5 נק') הצרן את הטענות בשפה מסדר ראשון עם שויון בעלת סיגנטורה

מתאימה.

(ב) (10 נק') בנה תורה אוניברסלית T של פסוקים (כולל אקסיומות שויון

מתאימות) כך שטענה 3 נובעת לוגית מטענות 1-2 אמ"ם T אינה ספיקה.

(ג) (7 נק') הוכח או הפרד: טענה 3 נובעת לוגית מטענות 1-2.

4. הוכח או הפרד על ידי דוגמא נגדית: (תשובה לא מנומקת לא תתקבל!)

(א) תהי T קבוצת נוסחאות ו- A, B נוסחאות. $T \cup \{A\} \vdash_{HFOL} B$ אמ"ם

$$T \vdash_{HFOL} A \rightarrow B$$

(ב) יהיו A נוסחה, d קבוע ו- s שם עצם חופשי להצבה במקום x ב- A . אם

$$A\{s/x\}\{d/z\} = A\{d/z\}\{s/x\} \text{ אז } A\{s/x\} \text{ מופיע חופשי ב-} s,$$

(ג) (5 נק') הרשימה הבאה היא הוכחה של $\vdash_{NDFOL} P(x) \rightarrow P(c)$, כאשר

P סימן יחס חד-מקומי ו- c קבוע:

1.	$P(x)$	ass	1
2.	$\forall xP(x)$	$(\forall I), 1$	1
3.	$P(c)$	$(\forall E), 2$	1
4.	$P(x) \rightarrow P(c)$	$(\rightarrow I), 3$	

(ד) (5 נק') הרשימה הבאה היא הוכחה של $\vdash_{NDFOL} \exists xP(x) \rightarrow P(c)$, כאשר

P סימן יחס חד-מקומי ו- c קבוע:

1.	$\exists xP(x)$	ass	1
2.	$P(c)$	ass	2
3.	$P(c)$	$(\exists E), 1, 2$	1
4.	$\exists xP(x) \rightarrow P(c)$	$(\rightarrow I), 3$	

(ה) אם x אינו מופיע חופשי ב- s ו- s חופשי להצבה במקום x ב- A :

$$A\{s/x\} \rightarrow \forall x(x = s \rightarrow A)$$