סמסטר ב' מועד ב' תשס"ז

תאריך הבחינה: 17.09.07

מבחן בלוגיקה למדעי המחשב

מרצה: אנה זמנסקי

מתרגל: טל לב-עמי

- משך הבחינה 3 שעות.
- אין להשתמש בחומר עזר.
- יש לענות על ארבע מתוך חמש שאלות.
- ניקוד כל שאלה זהה - 25 נקודות.

בהצלחה!

1. (א) (5 נק') הוכח באופן ישיר (ללא שימוש במשפטי השלמות והתקפות):

$$\vdash_{NDC} \Rightarrow (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$$

(ב) (3 נק') הצרן את הטענות הבאות בשפה מסדר ראשון בעלת סיגנטורה מתאימה:

i. כל מי שנרשם לקורס בלוגיקה יכול לגשת למבחן בלוגיקה.

ii. אף סטודנט לפסיכולוגיה לא יכול לגשת למבחן בלוגיקה.

iii. כל מי שלמד מתמטיקה בדידה נרשם לקורס בלוגיקה.

iv. אף סטודנט לפסיכולוגיה לא למד מתמטיקה בדידה.

(ג) (12 נק') הוכח בעזרת דדוקציה טבעית או משפט הרברנד או הפרך בעזרת דוגמא נגדית: הטענה הרביעית נובעת לוגית משלשת הטענות הראשונות.

(ד) (5 נק') תאר במפורט כיצד תשתנה תשובתך לסעיפים ב' ו-ג' אם נחליף את הטענה הראשונה בטענה הבאה:

כל אדם שנרשם לקורס בלוגיקה יכול לגשת למבחן בלוגיקה.

2. בהינתן קבוצת פסוקים Σ בתחשיב הפסוקים, $Sat(\Sigma)$ היא קבוצת כל המודלים של Σ, כלומר: $Sat(\Sigma) = \{v \mid v \models \Sigma\}$. נאמר ש-$\Sigma$ מגדירה קבוצת השמות V אם $V = Sat(\Sigma)$. נאמר שקבוצת השמות V היא גדירה אם קיימת קבוצת נוסחאות Σ המגדירה אותה.

(א) (3 נק') הוכח או הפרך: קבוצת ההשמות הריקה היא גדירה.

(ב) (3 נק') הוכח או הפרך: קבוצת כל ההשמות היא גדירה.

(ג) (4 נק') הוכח או הפרך: אם Σ_1, Σ_2 מגדירות קבוצות השמות K_1, K_2 בהתאמה, אז הקבוצה $\{A \vee B \mid A \in \Sigma_1, B \in \Sigma_2\}$ מגדירה את $K_1 \cup K_2$.

(ד) (4 נק') הוכח או הפרך: אם Σ_1, Σ_2 מגדירות קבוצות השמות K_1, K_2 בהתאמה, אז הקבוצה $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ מגדירה את $K_1 \cap K_2$.

(ה) (11 נק') הוכח: קבוצת כל ההשמות שנותנות ערך T רק לקבוצה סופית של אטומים אינה גדירה.

רמז: נניח בשלילה כי קבוצה זו גדירה על ידי קבוצת פסוקים Σ ונסתכל על הקבוצה $\Sigma \cup \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

3. נוסיף לשפת תחשיב הפסוקים קשר חדש חד-מקומי $\Box$. המערכת $S4$ מתקבלת מ-HPC על ידי הוספת הדברים הבאים (לאקסיומות וכללי היסק הקיימים ב-HPC):

(א) אקסיומות נוספות:

- $(\mathbf{T}): \ \Box A \to A$
- $(\mathbf{K}): \ \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$
- $(\mathbf{D}): \ \Box A \to \Box\Box A$

(ב) כלל היסק נוסף:

$$\frac{A}{\Box A}\ \mathbf{NEC}$$

הוכח את משפט הדדוקציה המוחלש הבא עבור $S4$:

$$\Gamma, A \vdash_{S4} B \text{ אמ"ם } \Gamma \vdash_{S4} \Box A \to B$$

4. (25 נק') תהי Γ קבוצת פסוקים ו-$\forall x \forall y \exists z \psi(x,y,z)$ פסוק בשפה L, כך שמתקיים $\Gamma \vdash_{FOL} \forall x \forall y \exists z \psi(x,y,z)$. יהי φ פסוק ב-L ו-f סימן פונקציה דו-מקומי שאינו ב-L. תן הוכחה מלאה שאם $\Gamma \cup \{\forall x \forall y \psi(x,y,f(x,y))\} \vdash_{FOL} \varphi$ אז $\Gamma \vdash_{FOL} \varphi$.

5. הוכח או הפרך על ידי דוגמא את הטענות הבאות. תשובה לא מנומקת לא תתקבל.

נסמן $\psi_\perp = \exists x.\neg(x = x)$.

(א) (5 נק') $T \not\vdash^t_{FOL=} \psi_\perp$ אמ"ם ל-T יש t-מודל נורמלי.

(ב) (5 נק') $T \not\vdash^v_{FOL=} \psi_\perp$ אמ"ם ל-T יש v-מודל נורמלי.

(ג) (5 נק') אם פסוק אוניברסלי בשפה L ספיק, אז הוא ספיק במבנה הרברנד עבור L.

(ד) (5 נק') $\vdash_{FOL} \forall x(p(x) \vee \exists y q(x,y)) \to \exists y \forall x(p(x) \vee q(x,y))$

(ה) (5 נק') נתונה שפה L בעלת סיגנטורה הכוללת n קבועים וסימן יחס דו-מקומי R בלבד. קיים אלגוריתם המקבל נוסחה בשפה זו מהצורה $\forall x_1 ... \forall x_n \exists y_1 ... \exists y_m A$, כאשר A ללא כמתים, והמכריע את תקפותה הלוגית של הנוסחה.