

## פתרון תרגיל מס' 5

1.

$$\frac{\frac{\frac{\neg A, A \wedge B \Rightarrow A \wedge B}{\neg A, A \wedge B \Rightarrow A} (\wedge E)}{\neg A \Rightarrow \neg(A \wedge B)} (\neg I)}{\neg A \vee \neg B \Rightarrow \neg(A \vee \neg B)} (\rightarrow I)$$

$$\frac{\frac{\frac{\neg B, A \wedge B \Rightarrow A \wedge B}{\neg B, A \wedge B \Rightarrow B} (\wedge E)}{\neg B \Rightarrow \neg(A \wedge B)} (\rightarrow I)}{\neg B, A \wedge B \Rightarrow \neg B} (\rightarrow E)$$

$$\frac{A, B \Rightarrow A}{A \Rightarrow (B \rightarrow A)} (\rightarrow I)$$

$$\Rightarrow A \rightarrow (B \rightarrow A) (\rightarrow I)$$

$$\frac{A \Rightarrow A}{A \Rightarrow A \vee B} (\vee I)$$

$$\Rightarrow A \rightarrow (A \vee B) (\rightarrow I)$$

$$\frac{\frac{\frac{(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \Rightarrow (A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D)}{(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \Rightarrow C \rightarrow D} (\wedge E)}{\frac{(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D), C \Rightarrow D}{(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D), C \Rightarrow B \vee D} (\vee I)} (\rightarrow E)}{A \vee C \Rightarrow A \vee C} (\rightarrow I)$$

$$\frac{\frac{\frac{(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \Rightarrow (A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D)}{(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \Rightarrow A \rightarrow B} (\wedge E)}{\frac{(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D), A \Rightarrow B}{(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D), A \Rightarrow B \vee D} (\vee I)} (\rightarrow E)}{A \vee C \Rightarrow A \vee C} (\rightarrow I)$$

$$\frac{\frac{(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D), A \vee C \Rightarrow (B \vee D)}{(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \Rightarrow (A \vee C \rightarrow B \vee D)} (\rightarrow I)}{\Rightarrow (A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \rightarrow (A \vee C \rightarrow B \vee D)} (\rightarrow I)$$

את פתרון סעיף ה' נרשום בכתיבה המקוצרת.  
 יש להוכיח שהצג למות עזר: (1)  $\neg A \vee A \vdash_{NDC}$  יוכח בתרגיל 2  
 (2)  $B \Rightarrow A \vee \neg A \vdash_{NDC}$  לכל  $B$  - הוכיחו לבד

$$\frac{[A]_1 \quad [\neg A]_2 \quad \frac{[(A \wedge B) \rightarrow C]_3}{\frac{C}{(A \rightarrow C)} (\rightarrow I_4)}}{[(A \wedge B) \rightarrow C]_6 \text{ (lemma 2)}} \quad \frac{[A]_4 \quad [B]_5}{\frac{C}{B \rightarrow C} (\rightarrow I_5)} \quad \frac{C}{(A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C)} (\rightarrow I_{4,2})$$

2.  $\neg A \wedge \neg B \equiv \underbrace{\neg(A \wedge B)}_{DNF/CNF}$  שצמנו לב שהנוסחה הזאת היא בצורת DNF מלאה ונצורת CNF לא מלאה!

3. פסוק בצורת  $CNF$  הוא  $U_1 \wedge \dots \wedge U_n$  הוא טאוטולוגיה אם לכל  $U_i$  קיים פסוק אטומי  $p_i$  כך שהליטרלים  $p_i, \neg p_i$  מוכלים בתוך  $U_i$ .  
 הנוסחה הזאת לא בצורת CNF/DNF מלאה.

4.  $A \wedge B = (A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow B)$ ,  $\neg A = A \uparrow A$ .  
 נראה שהוא הכרחי: נניח בשלילה שקיים  $U_i$  שלא מקיים את הדרגשה. נגדיר השמה שנותנת  $t$  לכל  $U_i$   $v(U_i) = f$  לכל שאר האטומים. בתוך  $U_i$   $v(U_i) = f$  ולכן  $v(U_i) = f$ .

5. לכל השמה  $v$  נגדיר השמה  $\bar{v}$  שנותנת לכל אטום  $A$   $\bar{v}(A) = (A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow B)$ .  
 נאמר שפסוק הוא מהפכני אם לכל השמה  $v$  מתקיים:  $v(A) \neq \bar{v}(A)$ .  
 נאמר שפסוק הוא באינדוקציה על קבוצת הפסוקים שמכללים  $\{\neg, \leftrightarrow\}$  של פסוק הוא או מהפכני או שמרני.  
 נאמר שפסוק הוא מהפכני אם לכל השמה  $v$  מתקיים:  $v(A) \neq \bar{v}(A)$ .

כעת נקח פסוק שאינו מהפכני ואינו שמרני. יהי  $q \rightarrow p \rightarrow q$ . נראה ש- $B$  אינו שמרני: נקח השמה  $v$  כלשהי כך ש- $f = t, v(p) = t, v(q) = f, \bar{v}(q) = t$  אז  $v(B) \neq \bar{v}(B)$ . אבל  $\bar{v}(p) = f, \bar{v}(q) = t$  יש להראות גם ש- $B$  אינו מהפכני. מכיון ש- $B$  אינו מהפכני ואינו שמרני, אין פסוק שמכיל רק  $\{\neg, \leftrightarrow\}$  ששקול לו.

6. נוכח שלכל פסוק  $A$  כך ש- $A \vdash_{HPI} A$  טאוטולוגיה בלוגיקה התלת-ערכית הזו. ההוכחה - באינדוקציה על אורך ההוכחה. בסיס: נודא שכל האקסיומות של HPI הן טאוטולוגיות בלוגיקה התלת ערכית שהגדרנו. צעד: המשיכו בבית...

כמו כן, קל לראות ש- $N_2$  אינה טאוטולוגיה בלוגיקה התלת-ערכית: השמה שנותנת ערך  $\perp$  ל- $A$ , נותנת ערך  $\perp \notin D$  ל- $\neg A \rightarrow A$ .

נגיח בשלילה ש- $N_2 \vdash_{HPI} N_2$  או  $N_2$  היא טאוטולוגיה בלוגיקה התלת-ערכית - קיבלנו סתירה.