

לוגיקה למדעי המחשב - תרגיל מס' 8

1. נתונה הנוסחה הבאה: $\Psi = \forall x \exists y (\exists z \forall x R(x, z, w) \wedge \exists w P(w, x, z))$. בדוק חופשיות להצבה. בצע שינוי שמות משתנים קשורים היכן שצריך, וכתוב את תוצאת ההצבה.

$$\Psi\{f(x, y)/x, x/y, f(y, y)/z, w/w\} \quad (\alpha)$$

$$\Psi\{f(z, w)/x, y/y, f(z, z)/z, f(w, s)/w\} \quad (\beta)$$

$$\Psi\{f(s, w)/x, f(s, w)/y, f(s, w)/z, f(s, w)/w\} \quad (\gamma)$$

2. הוכח את משפט ההחלפה עבור שמות עצם: יהיו t, s_1, s_2 שמות עצם כלשהם ו- x משתנה. אז לכל השמה v המקיימת $v[s_1] = v[s_2]$ מתקיים $v[t\{s_1/x\}] = v[t\{s_2/x\}]$.

3. קבע האם הנוסחאות הבאות תקפות לוגית. הוכח או תן דוגמה נגדית.

$$\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (\exists x A \rightarrow \exists x B) \quad (\alpha)$$

$$\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (\forall x A \rightarrow \forall x B) \quad (\beta)$$

$$(\exists x A \wedge \exists x B) \rightarrow \exists x(A \wedge B) \quad (\gamma)$$

$$x \notin FV(A), \forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall x B) \quad (\delta)$$

$$x \notin FV(A), \forall x(A \vee B) \rightarrow (A \vee \forall x B) \quad (\eta)$$

$$(\forall x \exists y A) \rightarrow (\exists y \forall x A) \quad (\iota)$$

$$(\forall x A) \rightarrow (\exists x A) \quad (\kappa)$$

$$(\exists x A) \rightarrow (\forall x A) \quad (\lambda)$$

$$(\exists x(A \vee B)) \rightarrow (\exists x A \vee \exists x B) \quad (\mu)$$

$$(\neg \exists x A) \rightarrow (\forall x \neg A) \quad (\nu)$$

$$(\forall x \neg A) \rightarrow (\neg \exists x A) \quad (\zeta)$$

4. במבנה המספרים הטבעיים נפרש את e^2 כיחס השוויון, l^2 - יחס "קטן מ-", f_1^2 - חיבור, f_2^2 - כפל, c_0 - אפס. מצא השמות שיפריכו את הנוסחאות (אם יש כאלה) הבאות וכאלה שיהפכו אותן לנכונות במבנה:

$$\forall y (e^2(f_2^2(x, y), z)) \bullet$$

$$e^2(c_0, f_1^2(x, y)) \bullet$$

$$l(c_0, f_1^2(x, y)) \bullet$$

$$\exists y (\exists z (\neg e^2(c_0, z) \wedge e^2(f_2^2(z, z), z) \wedge e^2(x, f_2^2(y, z)))) \bullet$$

5. הוכח שאם x אינו חופשי ב- A אז לכל מבנה M והשמה v מתקיים:

$$M, v \models (\forall x(B \rightarrow A)) \rightarrow (\exists x B \rightarrow A)$$

6. הוכח או הפרד:

$$T \vdash_{FOL}^v A \text{ או } T \vdash_{FOL}^t A \bullet$$

$$T \vdash_{FOL}^t A \text{ או } T \vdash_{FOL}^v A \bullet$$