לוגיקה למדעי המחשב - תרגיל מס' 11

1. (חזרה על תחשיב הפסוקים) תהיינה A, B נוסחאות כלשהן בתחשיב הפסוקים ו-p - פסוק אטומי.

(א) הוכח או הפרך: אם $\vdash_{CPL} p \to (A \to B)$ אז לפחות אחת הטענות הבאות מתקיימת: $\vdash_{CPL} p \to B$ או $\vdash_{CPL} p \to \neg A$.

(ב) חזור על סעיף א' כאשר ידוע ש-p הוא הפסוק האטומי המשותף היחיד של A ו-B.

2. לגבי הנוסחאות הבאות, קבעו אם הן תקפות לוגית. הוכיחו בדדוקציה טבעית או תנו דוגמא נגדית.

(א) $\forall x(A \to B) \to (\exists x A \to \exists x B)$

(ב) $\exists x A \wedge \exists x B \to \exists x(A \wedge B)$

(ג) $\forall x \neg A \to \neg \exists x A$

(ד) $\forall x \exists y A \to \exists y \forall x A$

3. (שאלה ממבחן) תהי L שפה בעלת סיגנטורה הכוללת סימן יחס דו-מקומי R.

(א) הצרן את הטענות הבאות:

i. R הוא יחס טרנזיטיבי.

ii. R הוא יחס אי–רפלקסיבי.

iii. R הוא יחס אנטי–סימטרי.

(ב) הוכח בעזרת דדוקציה טבעית או הפרך בעזרת דוגמא נגדית: הטענה השלישית נובעת לוגית משתי הטענות הראשונות.

(ג) נסמן את קבוצת שלושת הפסוקים שקיבלת בסעיף א' ב-$Ax(R)$.
מבנה $M = \langle D, I \rangle$ עבור L ייקרא מבנה מסודר אם $I[R]$ הוא יחס טרנזיטיבי ואי-רפלקסיבי.
נגדיר יחס נביעה חדש בין קבוצות פסוקים לבין פסוקים ב-L:
$\Gamma \vdash_{FOL}^{Ord} \psi$ אם לכל מבנה מסודר M: $M \models \Gamma$ גורר $M \models \psi$.
הוכח או הפרך: לכל קבוצת פסוקים Γ ופסוק ψ, $\Gamma \vdash_{FOL}^{Ord} \psi$ אמ"ם $\Gamma \cup Ax(R) \vdash_{FOL} \psi$.