לוגיקה למדעי המחשב - הרצאה 3

משפט הדדוקציה עבור HPC (קישור **wikipedia**: http://en.wikipedia.org/wiki/Deduction_theorem)

אם $T \cup \{\varphi\} \vdash_{HPC} \psi$ אז $T \vdash_{HPC} \varphi \to \psi$

<u>הוכחה:</u>

נניח $T \cup \{\varphi\} \vdash_{HPC} \psi$. אז קיימת סדרת הוכחה ב-HPC של ψ מ-$T \cup \{\varphi\}$: $\psi_1, \ldots, \psi_n$ (כאשר $\psi_n = \psi$).
נוכיח באינדוקציה על n שאז $T \vdash_{HPC} \varphi \to \psi$:

- **בסיס האינדוקציה:** $n = 1$, כלומר הסדרה ψ היא סדרת הוכחה ב-HPC מ-$T \cup \{\varphi\}$. זה אפשרי באחד משלושת המקרים הבאים:
  - ψ אקסיומה של HPC. במקרה זה הסדרה הבאה היא הוכחה של $\varphi \to \psi$ מ-T ב-HPC:

מ-$(I1)$	1.	$\psi \to (\varphi \to \psi)$
אקסיומה של HPC	2.	ψ
מ-1,2 ע"י MP	3.	$\varphi \to \psi$

  - $\psi \in T$. במקרה זה, הסדרה בסעיף א' תהווה הוכחה של $\varphi \to \psi$ מ-T כשכל ההבדל הוא שההצדקה לכך ש-ψ מופיע בסדרה (פסוק 2) היא עתה ש-$\psi \in T$.
  - $\psi = \varphi$. במקרה זה צריך להראות ש-$T \vdash_{HPC} \varphi \to \varphi$, אבל כבר הראנו ש-$\vdash_{HPC} \varphi \to \varphi$ ולכן, מתכונת המונוטוניות של יחס הנביעה, $T \vdash_{HPC} \varphi \to \varphi$ (הערה: למעשה הראנו כי $\vdash_{HPC} p \to p$, אבל אפשר להראות כי $\vdash_{HPC} \varphi \to \varphi$ באופן דומה או ע"י משפט ההצבה של HPC).

- **הנחת האינדוקציה:** לכל $i < n$ מתקיים שאם $\psi_1, \ldots, \psi_i$ הוכחה ב-HPC מ-$T \cup \{\varphi\}$ אז $T \vdash_{HPC} \varphi \to \psi_i$.

- **מעבר האינדוקציה:** נוכיח שאם $\psi_1, \ldots, \psi_n$ הוכחה ב-HPC מ-$T \cup \{\varphi\}$ אז $T \vdash_{HPC} \varphi \to \psi_n$.
  ישנן 4 אפשרויות בקשר ל-ψ_n:
  - ψ_n אקסיומה של HPC.
  - $\psi_n \in T$.
  - $\psi_n = \varphi$
  - ψ_n הוסק מ-ψ_i, ψ_j ($i, j < n$) ע"י MP

  בשלושת המקרים הראשונים, מוכיחים ש-$T \vdash_{HPC} \varphi \to \psi_n$ בדיוק כמו בבסיס האינדוקציה.
  במקרה הרביעי: $\psi_i = \psi_j \to \psi_n$ ולפי הנחת האינדוקציה לגבי i ו-j מתקיים $T \vdash_{HPC} \varphi \to \psi_i$ (כלומר $T \vdash_{HPC} \varphi \to (\psi_j \to \psi_n)$) ו-$T \vdash_{HPC} \varphi \to \psi_j$ (כי $\psi_1, \ldots, \psi_i$ ו-$\psi_1, \ldots, \psi_j$ הוכחות ב-HPC מ-$T \cup \{\varphi\}$ ו-$i, j < n$). נבנה הוכחה של $\varphi \to \psi_n$ מ-T באופן הבא:

הוכחה מ-T של $\varphi \to \psi_i$	$\left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \varphi \to (\psi_i \to \psi_n) \end{array} \right.$
הוכחה מ-T של $\varphi \to \psi_j$	$\left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \varphi \to \psi_j \end{array} \right.$
מ-$(I2)$	$(\varphi \to (\psi_j \to \psi_n)) \to ((\varphi \to \psi_j) \to (\varphi \to \psi_n))$
ע"י MP	$(\varphi \to \psi_j) \to (\varphi \to \psi_n)$
ע"י MP	$(\varphi \to \psi_n)$

<u>דוגמא:</u>

צריך להוכיח $A \to B,\ B \to C \vdash_{HPC} A \to C$.
לפי משפט הדדוקציה, מספיק להראות כי $A \to B,\ B \to C,\ A \vdash_{HPC} C$. סדרת הוכחה:

הנחה	1.	$A \to B$
הנחה	2.	A
מ-1,2 ע"י MP	3.	B
הנחה	4.	$B \to C$
מ-3,4 ע"י MP	5.	C

הכללת משפט הדדוקציה

נניח ש-H מערכת נוסח הילברט כלשהי ש-I1 ו-I2 אקסיומות שלה ו-MP כלל היסק יחיד שלה, אז משפט הדדוקציה נכון ל-H עם אותה הוכחה בדיוק. חשוב לציין שהתנאי לכך ש-MP כלל היסק יחיד הוא הכרחי, שהרי אחרת, הוכחת משפט הדדוקציה ל-H תצטרך לבדוק מקרים נוספים (לגבי ψ_n).

<u>דוגמא</u>: HPI - תחשיב הילברט האינטואיציוניסטי עבור שפת תחשיב הפסוקים מתקבל מ-HPC ע"י החלפת האקסיומה N2 ב-$\neg A \to (A \to B)$. משפט הדדוקציה נכון למערכת זו עם אותה ההוכחה.

<u>הערה</u>: גם משפט הנאותות נכון עבור HPI, אך לא משפט השלמות.

"משפט" הדדוקציה הסמנטי

אם $T \cup \{\varphi\} \vdash_{CPL} \psi$ אז $T \vdash_{CPL} \varphi \to \psi$.

<u>הוכחה</u>: יהי v מודל של T.

- אם $v(\varphi) = f$ אז $v(\varphi \to \psi) = t$ לפי טבלת האמת של $\to$. לכן v מודל של $\varphi \to \psi$ במקרה זה.
- אם $v(\varphi) = t$ אזי v מודל של $T \cup \{\varphi\}$ ולכן מהנתון v גם מודל של ψ, כלומר $v(\psi) = t$. לכן, לפי טבלת האמת של $\to$, $v(\varphi \to \psi) = t$ וגם במקרה זה v הוא מודל של $\varphi \to \psi$.

נוסחים מחוזקים של משפטי הדדוקציה

סמנטי: $T \cup \{\varphi\} \vdash_{CPL} \psi$ אמ"ם $T \vdash_{CPL} \varphi \to \psi$

סינטקטי: $T \cup \{\varphi\} \vdash_{HPC} \psi$ אמ"ם $T \vdash_{HPC} \varphi \to \psi$

<u>תרגיל</u>: להוכיח את הכיוון שלא הוכח בכיתה עבור הנוסחים המחוזקים.

<u>תרגיל</u> (משפט ההצבה של HPC): להוכיח שאם $\vdash_{HPC} \varphi$ ו-ψ מתקבל מ-φ ע"י הצבת נוסחאות במקום המשתנים האטומיים של φ אז גם $\vdash_{HPC} \psi$.