לוגיקה למדעי המחשב - הרצאה 1

קישור wikipedia: http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_topics_in_logic

שימושי הלוגיקה במדעי המחשב

- אימות תכניות.
- ייצוג ידע וטיפול בו.
  - מסדי נתונים.
  - בסיסי ידע (מערכות מומחה - expert systems).
- הוכחה אוטומטית. משפט לא טריוויאלי אחד שהוכח בעזרת המחשב הוא שאפשר לצבוע כל מפה ע"י 4 צבעים כך שכל שתי "מדינות" שכנות צבועות בצבעים שונים. ראה http://en.wikipedia.org/wiki/Four_color_theorem.
- לוגיקה כמודל חישובי - Logic Programming.
- קביעת גבולות היכולת של מה שאפשר לעשות עם מחשב (בעיית העצירה).

מבנה הלוגיקה

קישור wikipedia: http://en.wikipedia.org/wiki/Logic

לצורך כל שימוש בלוגיקה צריך:

1. שפה פורמלית:
   - א"ב (מסמנים בד"כ באות L).
   - קטיגוריות סינטקטיות.
     - לכל קטיגוריה סינטקטית מתאימה קבוצה חלקית של L^* (קבוצת המילים מעל L) - המחרוזות השייכות לקטיגוריה זו.
     - כל שפה פורמלית חייבת לכלול קטיגוריה של הנוסחאות של השפה (מסמנים o - omicron).
   - השימוש בשפה נעשה ע"י הצרנה.
2. יחס נביעה (מסמנים $\vdash$)

יחס נביעה של לוגיקה הוא יחס בין קבוצות של נוסחאות לנוסחאות ($\vdash \subseteq P(o) \times o$) שמקיים את הדרישות הבאות:

- "רפלקסיביות" - אם $A \in T$ אז $T \vdash A$. זו אינה רפלקסיביות במובן הרגיל כי רפלקסיביות רגילה היא תכונה של יחסים בין קבוצה לעצמה ויחס הנביעה אינו כזה.
- מונוטוניות - אם $T \vdash A$ ו- $T \subseteq S$ אז $S \vdash A$.
- "טרנזיטיביות" (חתך) - אם $T \vdash \varphi$ ו- $T, \varphi \vdash \psi$ אז $T \vdash \psi$. הכוונה בסימון "T, φ" היא כמובן $T \cup \{\varphi\}$.

יחסי נביעה מגדירים בד"כ בצורה סמנטית או בצורה סינטקטית:

- הצורה הסמנטית מבוססת על מושג <u>המודל</u>. מגדירים קבוצה של "מבנים" או "פירושים" עבור השפה, מגדירים יחס סיפוק (satisfaction) בין נוסחאות למבנים (F) ואומרים שמבנה I הוא מודל של נוסחא φ אם $I \models \varphi$ (כאשר $\models$ הוא יחס הסיפוק). אומרים ש-I הוא מודל של קבוצת נוסחאות T אם הוא מודל של כל אחת מאיברי T ולבסוף מגדירים ש-φ נובע מ-T לפי הסמנטיקה אם כל מודל של T הוא גם מודל של φ.
- הגדרה סינטקטית של יחס נביעה מבוססת על מושג <u>ההוכחה</u>. מגדירים "הוכחה" של נוסחא φ מקבוצת הנחות T ומגדירים ש-φ נובע מ-T אם יש לו הוכחה מ-T.

תחשיב הפסוקים הקלאסי - Classical Propositional Logic (CPL)

קישור wikipedia: http://en.wikipedia.org/wiki/Propositional_logic

השפה ($\mathcal{L}pc$)

- <u>הא"ב</u>:
  - רשימה בת מניה של פסוקים אטומיים: $p_1, p_2, p_3, \ldots$.
  - קשרים: $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$.
  - סוגריים: (ו-).
- <u>קטיגוריה סינטקטיות</u> יחידה - נוסחאות (שנקראות כאן גם פסוקים). קבוצת הנוסחאות מוגדרת (בצורה רקורסיבית) כך:
  - כל פסוק אטומי הוא נוסחא.
  - אם φ ו- ψ הן נוסחאות אז המילים הבאות הן נוסחאות: $\neg\varphi$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$. את הסוגריים צריך כדי שתהיה "קריאה יחידה" של הנוסחא אך אפשר להבטיח זאת גם (למשל) בעזרת חוקי קדימות או ע"י Polish Notation, בו הקשר קודם לפסוק.

  דוגמא לנוסחא: $(\neg p \rightarrow (q \vee r))$ ב-Polish Notation, למשל, נוסחא זו תהיה $\rightarrow \neg p \vee qr$.

<u>טענה</u>: בכל נוסחא ב-$\mathcal{L}pc$ מספר הסוגריים השמאליים שווה למספר הסוגריים הימניים. אפשר להוכיח את הטענה ע"י אינדוקציה על מספר הסימנים בנוסחא אך אז מעבר האינדוקציה נהיה מסורבל מאוד. יותר נוח להוכיח באינדוקציה על מבנה הנוסחא.

<u>הוכחה</u> (באינדוקציה על מבנה הנוסחא):

נסמן ב-$n_L(\varphi)$ ו-$n_R(\varphi)$ את מספר הסוגריים השמאליים והימניים ב-φ בהתאמה.

- בסיס האינדוקציה: φ היא נוסחא אטומית ואז $n_L(\varphi) = 0 = n_R(\varphi)$.
- הנחת האינדוקציה: אם ψ פסוק קצר מ-φ אזי $n_L(\psi) = n_R(\psi)$.
- מעבר האינדוקציה: מתחלק כאן ל-2 מקרים:
  - קיים פסוק ψ כך ש- $\neg\psi = \varphi$. לפי הנחת האינדוקציה $n_L(\psi) = n_R(\psi)$ (כי ψ קצר מ-φ) ולכן $n_L(\varphi) = n_L(\psi) = n_R(\psi) = n_L(\varphi)$.
  - קיימים פסוקים ψ_1 ו-ψ_2 כך ש- $\varphi = (\psi_1 \diamond \psi_2)$ כאשר $\diamond \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$. לפי הנחת האינדוקציה, $n_L(\psi_1) = n_R(\psi_1)$ ו- $n_L(\psi_2) = n_R(\psi_2)$ ולכן

$$n_L(\varphi) = \quad 1 + n_L(\psi_1) + n_L(\psi_2) = 1 + n_R(\psi_1) + n_R(\psi_2) \quad = n_R(\varphi)$$

הגדרת יחס הנביעה בצורה סמנטית

"מבנה" כאן נקרא בשם "השמה". "השמה" היא פונקציה, v, מקבוצת הנוסחאות אל $\{t, f\}$ (קבוצת ערכי האמת) המקיימת את התכונות הבאות:

- $v(\neg\varphi) = \neg^*(v(\varphi))$
- $v(\varphi \wedge \psi) = \wedge^*(v(\varphi), v(\psi))$
- $v(\varphi \vee \psi) = \vee^*(v(\varphi), v(\psi))$
- $v(\varphi \rightarrow \psi) = \rightarrow^*(v(\varphi), v(\psi))$

כאשר X^* היא פונקציית האמת (לפי טבלאות האמת) המתאימה ל-X. מכאן והלאה נשתמש ב-$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ הן כאותיות בשפה והן כפונקציות האמת המתאימות להן (כלומר נשמיט את הכוכב ב-X^*) אבל חובה להבין שאילו הם עצמים מתמטיים שונים.

הגדרה: נאמר שהשמה v מספקת נוסחא φ (או ש-v מודל של φ), ונסמן $v \models \varphi$, אם $v(\varphi) = t$.

הגדרה: נאמר ש- $T \vdash_{CPL} \varphi$ אם כל השמה המהווה מודל של T (כלומר מודל של כל הנוסחאות ב-T) היא גם מודל של φ.

טבלאות האמת של הקשרים הבסיסיים

A	B	$\wedge^*(A,B)$
f	f	f
f	t	f
t	f	f
t	t	t

A	B	$\vee^*(A,B)$
f	f	f
f	t	t
t	f	t
t	t	t

A	B	$\rightarrow^*(A,B)$
f	f	t
f	t	t
t	f	f
t	t	t

A	B	$\leftrightarrow^*(A,B)$
f	f	t
f	t	f
t	f	f
t	t	t

A	$\neg^*(A)$
f	t
t	f

דוגמאות

- $((p \wedge q) \rightarrow r), \quad (p \wedge \neg r) \quad \vdash_{CPL} \quad \neg q$

טבלת ההשמות:

p	q	r	$(p \wedge q)$	$\neg r$	$(p \wedge \neg r)$	$(p \wedge q) \rightarrow r$	$\neg q$
f	f	f	f	t	f	t	t
f	f	t	f	f	f	t	t
f	t	f	f	t	f	t	f
f	t	t	f	f	f	t	f
t	f	f	f	t	t	t	t
t	f	t	f	f	f	t	t
t	t	f	t	t	t	f	f
t	t	t	t	f	f	t	f

מכיוון שכל פעם ש- $v((p \wedge q) \rightarrow r) = t$ וגם $v(p \wedge \neg r) = t$ (למעשה זה קורה רק בשורה 5), מתקיים גם $v(\neg q) = t$, הפסוק $\neg q$ אכן נובע (ב-CPL) מקבוצת הפסוקים $\{(p \wedge q) \rightarrow r, \ (p \wedge \neg r)\}$.

- $d \rightarrow p, \quad p \rightarrow e, \quad \neg d \wedge e \quad \vdash_{CPL} \quad p$

טבלת ההשמות:

d	p	e	$d \rightarrow p$	$p \rightarrow e$	$\neg d$	$\neg d \wedge e$	p
f	f	f	t	t	t	f	f
f	f	t	t	t	t	t	f
f	t	f	t	f	t	f	t
f	t	t	t	t	t	t	t
t	f	f	f	t	f	f	f
t	f	t	f	t	f	f	f
t	t	f	t	f	f	f	t
t	t	t	t	t	f	f	t

מכיוון שישנה השמה (בשורה השניה) המספקת את $\{d \rightarrow p, \ p \rightarrow e, \ \neg d \wedge e\}$ אבל אינה מספקת את p, p אינו נובע (ב-CPL) מקבוצת הנוסחאות $\{d \rightarrow p, \ p \rightarrow e, \ \neg d \wedge e\}$.