לוגיקה למדעי המחשב - הרצאה 9

משפט הדדוקציה של HFOL

אם $T\cup\{A\}\vdash_{HFOL} B$ ו-A פסוק אז $T\vdash_{HFOL} A\to B$.

<u>הוכחה</u>: דומה לזו של תחשיב הפסוקים. אם $\varphi_1,\ldots,\varphi_n=B$ הוכחה של B מ-$T\cup\{A\}$ (ב-HFOL) אז מוכיחים באינדוקציה על $1\le i\le n$ ש-$T\vdash_{HFOL} A\to B$. ההבדל היחיד מתחשיב הפסוקים הוא שבצעד האינדוקציה יש עוד מקרה אחד - כאשר φ_i מתקבל מ-φ_j ($j<i$) ע"י Gen, כלומר $\varphi_i=\forall x\varphi_j$ עבור איזה משתנה x ולפי הנחת האינדוקציה $T\vdash_{HFOL} A\to\varphi_j$ הוכחה ל-$A\to\varphi_i$ תראה אז כך:

$\left\{\begin{array}{l}\quad\vdots\\ A\to\varphi_j\end{array}\right.$	הוכחה מ-T של $A\to\varphi_j$
$\forall x\,(A\to\varphi_j)$	ע"י Gen
$(\forall x\,(A\to\varphi_j))\to(A\to\forall x\varphi_j)$	ע"י אקסיומה $(III)\,(i)$, כיוון ש-A פסוק ולכן התנאי על האקסיומה מתקיים
$A\to\forall x\varphi_j\,(=A\to\varphi_i)$	ע"י MP

NDFOL: מערכת דדוקציה טבעית עבור FOL

הוכחה ונביעה מוגדרת בדיוק כמו עבור NDC עם הכללים הבאים:

כללים

- כל הכללים של תחשיב הפסוקים.
- $$(\forall I)\qquad \frac{^{(**)}\Gamma\Rightarrow A\{y/x\}}{\Gamma\Rightarrow\forall xA}$$
  בתנאי ש-y חופשי להצבה במקום x ב-A ואינו חופשי בשום נוסחא ב-$\Gamma\cup\{\forall xA\}$.
- $$(\exists I)\qquad \frac{^{(*)}\Gamma\Rightarrow A\{t/x\}}{\Gamma\Rightarrow\exists xA}$$
  בתנאי ש-t חופשי להצבה במקום x ב-A.
- $$(\forall E)\qquad \frac{^{(*)}\Gamma\Rightarrow\forall xA}{\Gamma\Rightarrow A\{t/x\}}$$
  בתנאי ש-t חופשי להצבה במקום x ב-A.
- $$(\exists E)\qquad \frac{^{(***)}\Gamma_1\Rightarrow\exists xA\qquad \Gamma_2, A\{y/x\}\Rightarrow C}{\Gamma_1,\Gamma_2\Rightarrow C}$$
  בתנאי ש-y חופשי להצבה במקום x ב-A ואינו חופשי בשום נוסחא ב-$\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\{\exists xA, C\}$.

דוגמא

אם $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ו-$\lim_{n\to\infty} b_n = b$ אז $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$.

<u>הוכחה:</u>

משמעות של $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ $(1)\ \forall\varepsilon\left(\varepsilon > 0 \to \exists N\left(\forall n\left(n > N \to |a_n - a| < \varepsilon\right)\right)\right)$

משמעות של $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ $(2)\ \forall\varepsilon\left(\varepsilon > 0 \to \exists N\left(\forall n\left(n > N \to |b_n - b| < \varepsilon\right)\right)\right)$

אנו רוצים להוכיח כי $\forall\varepsilon\left(\varepsilon > 0 \to \exists N\left(\forall n\left(n > N \to |(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon\right)\right)\right)$

יהי אם כן ε כלשהו. נוכיח $\varepsilon > 0 \to \exists N\left(\forall n\left(n > N \to |(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon\right)\right)$

גרירה מוכיחים ע"י הנחת הצד השמאלי ולכן נוסיף למאגר ההנחות את $(3)\ \varepsilon > 0$

כעת נשתמש ב-(1) ע"י $\forall E$: $\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \to \exists N\left(\forall n\left(n > N \to |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$

נשתמש בידע על מספרים כדי להראות בעזרת (3) ש: $\frac{\varepsilon}{2} > 0$

ונסיק בעזרת MP: $\exists N\left(\forall n\left(n > N \to |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$

כעת נניח $(4)\ \forall n\left(n > N \to |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$

אותו דבר עבור (2) ונסיק $\exists N\left(\forall n\left(n > N \to |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$

סיכום ביניים - הוכחנו בינתיים: $(1),(2),(3),(4) \Rightarrow \exists N\left(\forall n\left(n > N \to |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$

נניח כעת $(5)\ \forall n\left(n > N' \to |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$

<u>חשוב</u>: אסור להשתמש ב-N מכיוון שהוא מופיע חופשי ב-(4)

יהי n כלשהו מראים בעזרת $(4),(5)$ וידע על מספרים כי $n > \max(N, N') \to |(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon$

ובעזרת $\forall I$: $(1),(2),(3),(4),(5) \Rightarrow \forall n\left(n > \max(N, N') \to |(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon\right)$

כעת, בעזרת $\exists I$: $(1),(2),(3),(4),(5) \Rightarrow \exists N\left(\forall n\left(n > N \to |(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon\right)\right)$

בעזרת $\exists E$ נפטרים מ-$(4),(5)$ שהרי הראנו את $(4)\ \exists N$ ו-$(5)\ \exists N$ (כלומר ההנחות (4) ו-(5) היו "מוצדקות").

מקבלים אם כן: $(1),(2),(3) \Rightarrow \exists N\left(\forall n\left(n > N \to |(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon\right)\right)$

ע"י $\to I$ מקבלים: $(1),(2) \Rightarrow (\varepsilon > 0) \to \exists N\left(\forall n\left(n > N \to |(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon\right)\right)$

לבסוף, ע"י $\forall I$ מקבלים את: $(1),(2) \Rightarrow \forall\varepsilon\left((\varepsilon > 0) \to \exists N\left(\forall n\left(n > N \to |(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon\right)\right)\right)$

מ.ש.ל.

טענה

$(T \vdash_{NDFOL} A) \Rightarrow (T \vdash_{HFOL} A)$

מוכיחים שאם $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow A$ $\vdash_{NDFOL}$ אז $\vdash_{HFOL} A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to A$. הכיוון ההפוך נכון אם T מורכבת מפסוקים.

משפטי השלמות

- $T \vdash^v_{FOL} A$ אמ"ם $T \vdash_{HFOL} A$
- $T \vdash^t_{FOL} A$ אמ"ם $T \vdash_{NDFOL} A$

נוכיח את $T \vdash^v_{FOL} A \Leftarrow T \vdash_{HFOL} A$ רק עבור המקרה ש-T מורכבת מפסוקים ו-A עצמו הינו פסוק. כיוון שכל נוסחא שקולה כאן לסגור שלה, אין זה גורע מהכלליות. מה שנוכיח אם כן: אם A פסוק, T מורכבת מפסוקים ו-$T \nvdash_{HFOL} A$ אז יש מודל M של T שאינו מודל של A.

<u>הגדרה</u>: תהי L שפה עם סיגנטורה σ שיש בה קבוע אחד לפחות. מרחב הרברנד של L ($H(L)$) הוא קבוצת שמות העצם הסגורים של L (ש"ס - שם עצם סגור).

<u>הגדרה</u>: מבנה הרבנד עבור שפה L עם קבוע הוא מבנה $M = \langle D, I\rangle$ שבו:

- $D = H(L)$
- $I[c] = c$ –
  - אם f סימן פונקציה n-מקומי של L אז $I[f] = \lambda x_1 \in H(L), \ldots, x_n \in H(L) . f(x_1, \ldots, x_n)$, כלומר $f^I[t_1, \ldots, t_n] = f(t_1, \ldots, t_n)$ עבור כל $t_1, \ldots, t_n$ שמות עצם סגורים של L.

באינדוקציה מקבלים בקלות שאם t ש"ס אז $I[t] = t$ (בכל מבנה הרברנד $\langle H(L), I\rangle$).

<u>למה</u>: אם $\langle H(L), I\rangle$ מבנה הרברנד עבור L ו-p סימן יחס n-מקומי של L
אז: $I[p] = \{\langle t_1,\dots,t_n\rangle \in H(L)^n \mid M \vDash p(t_1,\dots,t_n)\}$ מכיוון ש-

$$M \vDash p(t_1,\dots,t_n) \;\Leftrightarrow\; \langle I[t_1],\dots,I[t_n]\rangle \in I[p] \;\Leftrightarrow\; \langle t_1,\dots,t_n\rangle \in I[p]$$

לכן מבנה הרברנד נקבע לחלוטין ע"י קבוצת הפסוקים האטומיים הנכונים בו. במילים אחרות, אם נסמן $HB(M)$ את קבוצת הפסוקים האטומיים הנכונים ב-M אז הפונקציה המתאימה לכל מבנה הרברנד M את $HB(M)$ היא פונקציה חח"ע מקבוצת מבני הרברנד של L על קבוצת כל הקבוצות של פסוקים אטומיים ב-L.

<u>הגדרה</u>: $HB(M)$ נקראת <u>בסיס הרברנד</u> של M.

<u>טענות</u>:

1. יהי t ש"ע של L, יהיו $x_1,\dots,x_n$ המשתנים החופשיים של t ותהי v השמה במבנה הרברנד M,
אז: $v[t] = t\{v(x_1)/x_1,\dots,v(x_n)/x_n\}$.
2. תהי φ נוסחא של L, יהיו $x_1,\dots,x_n$ המשתנים החופשיים של t ותהי v השמה במבנה הרברנד M,
אז $M,v \vDash \varphi \;\Leftrightarrow\; M \vDash \varphi\{v[x_1]/x_1,\dots,v[x_n]/x_n\}$.

<u>דוגמאות</u>:

- נניח $\sigma = \langle 0, s, <, =\rangle$, $0 \in \iota$, $s:\iota \to \iota$, $<:\iota^2 \to o$, $=:\iota^2 \to o$ ו-$L = L(\sigma)$.
אז: $H(L) = \{0, s(0), s(s(0)),\dots\}$ שאפשר לסמן: $s(0) = 1,\; s(s(0)) = 2,\;\dots$ ואז $H(L) = \{0,1,2,\dots\}$. ניקח השמה v שבה $v[x] = s(s(0))$ ו-$t = s(x)$. אז: $v[t] = s(x)\{s(s(0))/x\} = s(s(s(0))) = 3$.
- $\sigma_{PA} = \langle 0, s, <, +, *, =\rangle$. במבנה כזה, הפירוש של $+,*,=$ יהיה שונה מהרגיל.

<u>הוכחה</u>:

1. באינדוקציה על מבנה t:
   - בסיס האינדוקציה:
     - $t = c$ קבוע ואז אין משתנים חופשיים. מה שצריך להוכיח אז הוא ש-$v[c] = c$ וזה תמיד נכון.
     - $t = x$ משתנה ואז $v[t] = v[x]$ בעוד ש-$t\{v[x]/x\} = x\{v[x]/x\} = v[x]$.
   - צעד האינדוקציה: $t = f(s_1,\dots,s_n)$ אז:

$$\begin{aligned}
& v[t] = f^I[v[s_1],\dots,v[s_n]] = \\
\text{בכל מבנה הרברנד:}\quad & = f(v[s_1],\dots,v[s_n]) = \\
\text{לפי הנחת האינדוקציה:}\quad & = f(s_1\{v[x_1]/x_1,\dots,v[x_n]/x_n\},\dots,s_n\{v[x_1]/x_1,\dots,v[x_n]/x_n\}) = \\
& = t\{v[x_1]/x_1,\dots,v[x_n]/x_n\}
\end{aligned}$$

2. תרגיל.

<u>טענה</u>: נניח M מבנה הרברנד עבור L.

1. אם $\forall x\varphi$ פסוק אז $M \vDash \forall x\varphi$ אמ"ם לכל ש"ס t מתקיים $M \vDash \varphi\{t/x\}$.
2. אם $\exists x\varphi$ פסוק אז $M \vDash \exists x\varphi$ אמ"ם יש ש"ס t כך ש-$M \vDash \varphi\{t/x\}$.

<u>הוכחת א'</u>:

כיוון ש-$\forall x\varphi \vdash_{FOL} \varphi\{t/x\}$ (שניהם פסוקים, כי t ש"ס) לכן אם $M \vDash \forall x\varphi$ אז $M \vDash \varphi\{t/x\}$ לכל ש"ס t.

לכיוון השני, נניח $M \vDash \varphi\{t/x\}$ לכל ש"ס t. $M \vDash \forall x\varphi$ אמ"ם $M \vDash \varphi$ אמ"ם לכל השמה v מתקיים $M,v \vDash \varphi$ ולכן זה מה שאנחנו צריכים להוכיח. תהי אם כן v השמה. לפי למה קודמת, $M,v \vDash \varphi$ אמ"ם $M \vDash \varphi\{v[x]/x\}$. אם נסמן $t = v[x]$ אז t ש"ס ולפי ההנחה, $M \vDash \varphi\{t/x\}$, ולכן $M,v \vDash \varphi$.

<u>תנאי הנקין לגבי תורה T</u>: אם $\exists x\varphi$ פסוק כך ש-$T \vdash_{HFOL} \exists x\varphi$ אז יש ש"ס t כך ש-$T \vdash_{HFOL} \varphi\{t/x\}$.