לוגיקה למדעי המחשב - הרצאה 8

יחס הנביעה של FOL (First Order Logic)

הגדרה

תהי $L(\sigma)$ שפה מסדר ראשון.

- t-מודל של נוסחא φ בשפה $L(\sigma)$ הוא זוג $\langle M, v\rangle$ שבו M מבנה עבור $L(\sigma)$, v השמה ב-M ו-$M, v \vDash \varphi$.
- t-מודל של תורה T ב-$L(\sigma)$ הוא זוג $\langle M, v\rangle$ המהווה t-מודל של כל הנוסחאות ב-T.
- $T \vdash^{t}_{FOL} \varphi$ אם כל t-מודל של T הוא גם t-מודל של φ (T, φ באותה שפה).
- φ היא t-תקפה לוגית אם $\emptyset \vdash^{t}_{FOL} \varphi$.
- φ היא t-ספיקה אם יש לה t-מודל.

הגדרה

תהי $L(\sigma)$ שפה מסדר ראשון.

- v-מודל של נוסחא φ בשפה $L(\sigma)$ הוא מבנה M עבור $L(\sigma)$ המקיים ש-$M, v \vDash \varphi$ עבור כל השמה v ב-M.
סימון: $M \vDash \varphi$.
- v-מודל של תורה T ב-$L(\sigma)$ הוא מבנה M המהווה v-מודל של כל הנוסחאות ב-T.
- $T \vdash^{v}_{FOL} \varphi$ אם כל v-מודל של T הוא גם v-מודל של φ (T, φ באותה שפה).
- φ היא v תקפה לוגית אם $\emptyset \vdash^{v}_{FOL} \varphi$.
- φ היא v-ספיקה אם יש לה v-מודל.

<u>הערה</u>: בתחשיב הפסוקים $v \vDash \neg\varphi$ אמ"ם $v \nvDash \varphi$. בדומה, בתחשיב הפרדיקטים, $M, v \vDash \neg\varphi$ אמ"ם $M, v \nvDash \varphi$, כלומר "משהו" הוא t-מודל של $\neg\varphi$ אמ"ם הוא לא t-מודל של φ. אין זה נכון, אבל, ש-$M \vDash \neg\varphi$ אמ"ם $M \nvDash \varphi$.

<u>דוגמא</u>: $\mathbb{N} \nvDash (x+1)^2 = x^2+1$ אבל אין פירוש הדבר ש-$\mathbb{N} \vDash (x+1) \neq x^2+1$.

<u>הגדרה</u>: סגור של נוסחא φ הוא כל פסוק מהצורה $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \varphi$ כאשר $x_1, \ldots, x_n$ כוללים את כל המשתנים החופשיים של φ. לדוגמא, אם $\varphi = p(x, y)$ אז $\forall x \forall y.p(x, y)$, $\forall y \forall x.p(x, y)$ ו-$\forall y \forall z \forall x.p(x, y)$ הם סגורים של φ (ויש עוד הרבה). נסמן ב-$\forall T$ קבוצת סגורים של איברי T (סגור אחד לכל איבר).

<u>תכונות</u>: אם φ' סגור של φ אז:

- φ' הוא פסוק.
- φ' v-שקול לוגית ל-φ במובן ש-$\varphi \vdash^{v} \varphi'$ ו-$\varphi' \vdash^{v} \varphi$.

תכונות נביעה

- $\vdash^t \subseteq \vdash^v$: $\varphi \vdash^t T$ אומר ש-$\forall M \left[M \vDash T \rightarrow M \vDash \varphi\right]$, בעוד ש-$\varphi \vdash^v T$ אומר ש-$\forall M \forall v \left[M, v \vDash T \rightarrow M, v \vDash \varphi\right]$, כלומר $\forall M \left[\left(\forall v. M, v \vDash T\right) \rightarrow \left(\forall v. M, v \vDash \varphi\right)\right]$. באופן כללי, $\vdash^t$ אומר ש-$\forall v. \left(A\left(v\right) \rightarrow B\left(v\right)\right)$ עבור A ו-B מתאימים בעוד ש-$\vdash^v$ אומר ש-$\left(\forall v. A\left(v\right)\right) \rightarrow \left(\forall v. B\left(v\right)\right)$ (לאותם A ו-B) ואפשר לראות שהטענה הראשונה "חזקה" יותר.

- אם T מורכב מפסוקים ו-$\varphi \vdash^v T$ אז $\varphi \vdash^t T$. במקרה כזה נדבר לכן על נביעה סתם.

<u>הוכחה</u>: נניח $\varphi \vdash^v T$. יהי $\langle M, v\rangle$ t-מודל של T. אז $\langle M, v\rangle$ מספק את כל הפסוקים ב-T. כיוון שמדובר בפסוקים, אם השמה אחת מספקת אז כולן מספקות את כל איברי T. כלומר $M \vDash T$. כיוון ש-$\varphi \vdash^v T$ אז $M \vDash \varphi$, כלומר $M, u \vDash \varphi$ לכל השמה u, ובפרט $M, v \vDash \varphi$.

בפרט, כש-$T = \emptyset$, נקבל שאם $\varphi \vdash^v$ אז $\varphi \vdash^t$ ולכן $\varphi \vdash^t$ אמ"ם $\varphi \vdash^v$. לכן אפשר לדבר על <u>אמת-לוגית</u> ולסמן $\varphi \vdash_{FOL}$. באופן כללי יותר, אם T מורכבת מפסוקים אז אפשר לכתוב $\varphi \vdash_{FOL} T$ ואין זה משנה אם הכוונה ל-$\vdash^t_{FOL}$ או ל-$\vdash^v_{FOL}$.

- כלל ההכללה (generalization) נכון עבור v-נביעה אך לא עבור t-נביעה, כלומר:

  1. $\varphi \vdash^v \forall x \varphi$
  2. $\varphi \nvdash^t \forall x \varphi$

<u>הסבר 1</u>: נניח $M \vDash \varphi$ ונראה ש-$M \vDash \forall x \varphi$. כלומר צריך להראות שלכל השמה v, $M, v \vDash \forall x \varphi$. תהי איפוא v_0 השמה. נראה ש-$M, v_0 \vDash \forall x \varphi$. כלומר צריך להראות שלכל x-וריאנט v_0' של v_0 מתקיים $M, v_0' \vDash \varphi$, וזה אכן המצב, כיוון ש-$M \vDash \varphi$ (ולכן נכון עבור כל השמה, כולל v_0').

<u>דוגמא ל-2</u>: $x = 0 \nvdash^t \forall x. x = 0$. למשל $\mathbb{N}$ עם השמה v כך ש-$v\left(x\right) = 0$ ו-$v\left(y\right) = 1$ ($y \neq x$) היא t-מודל של $x = 0$ אך לא של $\forall x. x = 0$.

- כלל ההצבה נכון עבור v-נביעה אך לא עבור t-נביעה: $\varphi \vdash^v \varphi\left\{t/x\right\}$ (כמובן בתנאי ש-t חופשי להצבה עבור x ב-φ) אבל $\varphi \nvdash^t \varphi\left\{t/x\right\}$.

- תכונת הדדוקציה נכונה עבור t-נביעה אך לא באופן כללי עבור v-נביעה. כלומר $B \vdash^t T \cup \left\{A\right\}$ אמ"ם $A \rightarrow B \vdash^t T$ אבל אפשרי ש-$B \vdash^v T \cup \left\{A\right\}$ וגם $A \rightarrow B \nvdash^v T$ (אבל זה כן יהיה נכון כש-A פסוק).

- – $\varphi \vdash^v T$ אמ"ם $\forall x \varphi \vdash^v T$.
  – $\varphi \vdash^v T$ אמ"ם $\varphi \vdash^t \forall T$.

- יהיו $x_1, x_2, \ldots$ המשתנים החופשיים המופיעים ב-T ויהיו $d_1, d_2, \ldots$ קבועים חדשים שאינם מופיעים ב-$T \cup \left\{A\right\}$ והם שונים כולם זה מזה. אז: $A \vdash^t T$ אמ"ם $A\left\{d_1/x_1, d_2/x_2, \ldots\right\} \vdash T\left\{d_1/x_1, d_2/x_2, \ldots\right\}$.

תכונות ספיקות

- אם T v-ספיקה אז T גם t-ספיקה.
- אם T מורכבת מפסוקים אז T היא t-ספיקה אמ"ם T היא v-ספיקה. במקרה כזה נדבר על ספיקות סתם.
- T היא v-ספיקה אמ"ם $\forall T$ היא ספיקה.
- T היא t-ספיקה אמ"ם $T\left\{d_1/x_1, d_2/x_2, \ldots\right\}$ ספיקה, כאשר $x_1, x_2, \ldots$ הם המשתנים החופשיים המופיעים ב-T ו-$d_1, d_2, \ldots$ הם קבועים חדשים, שאינם מופיעים ב-T ושונים זה מזה.
- $T \cup \left\{A\right\}$ היא t-ספיקה אמ"ם $\neg A \nvdash^t T$.

<u>הקשר בין נביעה לספיקות</u>

יהי $\bot$ פסוק כלשהו כך ש-$\neg\bot$ אמת לוגית (למשל $\bot = \neg \forall x. \left(p\left(x\right) \rightarrow p\left(x\right)\right)$). קל לברר:

- $\neg A \equiv A \rightarrow \bot$.
- תורה T היא ספיקה אמ"ם $\bot \nvdash T$ (גם לגבי t-ספיקות/נביעה וגם לגבי v-ספיקות/נביעה).

מערכת נוסח הילברט עבור FOL

- כמו ב-HPC, יש אקסיומות וכללי היסק אך בדרך כלל יש יותר מכלל היסק אחד: MP וכלל אחד או שניים נוספים. בדרך כלל הכללים הם עבור v-נביעה.
- מושג ההוכחה בדיוק כמו ב-HPC (בהתחשב בעובדה שיש יותר מכלל היסק אחד).
- הנביעה במערכת כזו מוגדרת בדיוק כמו ב-HPC.

המערכת HFOL

אקסיומות

(I) כל האינסטנציות של אקסיומות HPC.

$$(II) \quad (i) \quad \forall x A \to A\{t/x\}$$
$$(ii) \quad A\{t/x\} \to \exists x A$$

בתנאי ש-t חופשי להצבה במקום x ב-A.

$$(III) \quad (i) \quad \forall x (A \to B) \to (A \to \forall x B)$$
$$(ii) \quad \forall x (B \to A) \to (\exists x B \to A)$$

בתנאי ש-x אינו חופשי ב-A.

כללים

$$(\text{MP})\ \frac{A \qquad A\to B}{B} \qquad (\text{Gen})\ \frac{A}{\forall x A}$$

משפט הנאותות של HFOL

אם $T \vdash_{HFOL} \varphi$ אז $T \vdash^{v}_{FOL} \varphi$.

<u>הוכחה</u>: באינדוקציה על פסוקי ההוכחה של φ מ-T ב-HFOL. כלומר, נניח $\varphi_1, \ldots, \varphi_n = \varphi$ הוכחה כזו, והאינדוקציה על i שאם $1 \le i \le n$ אז $T \vdash^{v} \varphi_i$.

- <u>בסיס האינדוקציה</u>: $i = 1$.
  - $\varphi_i \in T$ וזה מקרה טריביאלי.
  - φ_i אקסיומה של HFOL. נראה במקרה זה ש-φ_i תקפה בכל מבנה ובפרט במודלים של T. נראה כדוגמא את תקפות $II\,(i)$, כלומר $\vdash^{v} \forall x\varphi \to \varphi\{t/x\}$ (אם t חופשי להצבה עבור x ב-φ). מספיק להוכיח $\vdash^{t} \forall x\varphi \to \varphi\{t/x\}$ ולכן מספיק להראות ש-$\forall x\varphi \vdash^{t} \varphi\{t/x\}$. יהי איפוא $\langle M, v\rangle$ t-מודל של $\forall x\varphi$. לכן, לכל x-וריאנט v' של v מתקיים $M, v' \vDash \varphi$. אנו רוצים להראות שגם $M, v \vDash \varphi\{t/x\}$. לפי משפט ההצבה זה שקול ל-$M, v_s \vDash \varphi$ כש-$v_s(y) = v(y)$ אם $y \neq x$ ו-$v_s(x) = v(t)$. אבל $M, v_s \vDash \varphi$ כיוון ש-v_s הינו x-וריאנט של v.
- <u>הנחת האינדוקציה</u>: לכל $1 \le j < i$, מתקיים $T \vdash^{v}_{FOL} \varphi_i$.
- <u>צעד האינדוקציה</u>:
  - אם φ_i נובע מ-φ_j ו-φ_k בעזרת MP - תרגיל.
  - אם φ_i נובע מ-φ_j בעזרת Gen אז $\varphi_i = \forall x\varphi_j$ לאיזה x. מהנחת האינדוקציה, $T \vdash^{v} \varphi_j$, ראינו ש-$\varphi_j \vdash^{v} \forall x\varphi_j$ ולכן (מכיוון ש-$\vdash^{v}$ הוא יחס נביעה), $T \vdash^{v} \forall x\varphi_j$, כלומר $T \vdash^{v} \varphi_i$.