# לוגיקה למדעי המחשב - הרצאה 7

## סמנטיקה של שפות מסדר ראשון

בהינתן שפה מסדר ראשון, $L(\sigma)$, נגדיר מבנה (structure) עבור $L(\sigma)$ בתור זוג סדור $\langle D, I\rangle$ שבו:

- $D$ קבוצה לא ריקה של עצמים שנקראת התחום (domain) של המבנה, או העולם (universe) של המבנה.
- $I$ היא פונקציה המוגדרת על $\sigma$ (הסיגנטורה של השפה) המקיימת:
  - אם $c \in \iota$ קבוע של $\sigma$ אז $I[c] \in D$ (מסמנים גם $c^I$ במקום $I[c]$)
  - אם $f : \iota^n \to \iota$ סימן פונקציה $n$-מקומי של $\sigma$ אז $I[f] \in D^n \to D$ (מסמנים גם $f^I$).
  - אם $p : \iota^n \to o$ סימן יחס $n$-מקומי של $\sigma$ אז $I[p] \subseteq D^n$ (מסמנים גם $p^I$).

  $I$ נותנת את המובן (פירוש, אינטרפרטציה) של הסימנים של הסיגנטורה במבנה, $M = \langle D, I\rangle$.

<u>הערה</u>: כדי למנוע בלבול, נסמן:

- $f(t_1, \dots, t_n)$ - שם העצם בתוך השפה הפורמלית $L(\sigma)$ המתקבל מהפעלת סימן הפונקציה ה $n$-מקומי $f$ של $\sigma$ על שמות העצם $t_1, \dots, t_n$ של $\sigma$.
- $F[x_1, \dots, x_n]$ - תוצאת ההפעלה של הפונקציה $F$ עבור הארגומנטים $x_1, \dots, x_n$ (במטה-שפה).

<u>דוגמא</u> (עבור הסיגנטורה $\sigma_{PA}$):

- פירוש א': $\mathbb{N} = \langle N, I_1\rangle$ ($N$ - המספרים הטבעיים, כולל 0).

| בסימון "סטנדרטי" | בסימון שקול |
|---|---|
| $I_1[0] = 0$ | $I_1[c_0] = 0$ |
| $I_1[S] = \lambda n \in N.n+1$ | $I_1\left[f_0^1\right] = \lambda n \in N.n+1$ |
| $I_1[+] = \lambda n \in N, m \in N.n+m$ | $I_1\left[f_0^2\right] = \lambda n \in N, m \in N.n+m$ |
| $\dots$ | $\dots$ |

- פירוש ב': $M = \langle P(N), I_2\rangle$.
  - $I_2[0] = \emptyset$
  - $I_2[+] = \lambda X \in P(N), Y \in P(N).X \cup Y$
  - $I_2[<] = \subseteq$
  - $I_2[s] = \lambda X \in P(N).X \cup \{0\}$.

כדי שנוסחא תהיה תקפה לוגית, היא צריכה להיות תקפה בכל הפירושים. $\forall x \forall y.(x<y) \lor (y<x) \lor (y=x)$, למשל נכון (או תקף) בפירוש הראשון, אך אינו נכון בפירוש השני.

<u>הגדרה</u>: תהי $\sigma$ סיגנטורה ו-$M = \langle D, I\rangle$ מבנה עבורה. השמה ב-$M$ היא פונקציה המתאימה לכל משתנה איבר ב-$D$, כלומר $v : \text{variables} \to D$.

<u>הגדרה</u>: יהי $M = \langle D, I\rangle$ מבנה עבור $\sigma$ ותהי $v$ השמה ב-$D$. נרחיב את $v$ לפונקציה מקבוצת כל שמות העצם של $L(\sigma)$ אל $D$ באופן הבא:

- אם $c$ קבוע, $v[c] = c^I$.
- למשתנים ערך $v$ כבר מוגדר.
- $v[f(t_1, \dots, t_n)] = f^I[v[t_1], \dots, v[t_n]]$

## עובדות (להוכיח כתרגילים)

1. אם $v_1[x] = v_2[x]$ עבור כל משתנה $x$ המופיע בשם עצם $t$ אז $v_1[t] = v_2[t]$.
2. משפט ההחלפה עבור שמות עצם: אם $v[s_1] = v[s_2]$ אז $v[t\{s_1/x\}] = v[t\{s_2/x\}]$.
לדוגמא, $v[s(z) \cdot (x+3)] = v[s(z) \cdot y]$ אם $v[x] = 1, v[y] = 4$.
3. משפט ההצבה עבור שמות עצם: יהיו $x_1, \ldots, x_n$ משתנים שונים, $s_1, \ldots, s_n$ שמות עצם, $v$ השמה ו-$t$ שם עצם.
אז $v[t\{s_1/x_1, \ldots, s_n/x_n\}] = v_{\vec{s}}[t]$ כאשר $v_{\vec{s}}$ הינה ההשמה: $v_{\vec{s}}[x_i] = v[s_i]$ (עבור $i \in \{1, \ldots, n\}$) ו-$v_{\vec{s}}[y] = v[y]$ (עבור $y \notin \{x_1, \ldots, x_n\}$).

## הגדרת יחס הסיפוק

יהי $M = \langle D, I \rangle$ מבנה עבור סיגנטורה $\sigma$. יחס הסיפוק, $\vDash$, מוגדר באופן הבא:

- $M, v \vDash p(t_1, \ldots, t_n)$ אם $\langle v[t_1], \ldots, v[t_n] \rangle \in I[p]$.
- – $M, v \vDash \neg\varphi$ אם $M, v \nvDash \varphi$.
  – $M, v \vDash \varphi \wedge \psi$ אם $M, v \vDash \varphi$ וגם $M, v \vDash \psi$.
  – $M, v \vDash \varphi \vee \psi$ אם $M, v \vDash \varphi$ או $M, v \vDash \psi$.
  – $M, v \vDash \varphi \to \psi$ אם $M, v \nvDash \varphi$ או $M, v \vDash \psi$.
- – $M, v \vDash \forall x\varphi$ אם לכל השמה $v'$ ששונה מ-$v$ לכל היותר עבור המשתנה $x$, מתקיים $M, v' \vDash \varphi$ (להשמה כזו נקרא מעתה $x$-וריאנט של $v$)
  – $M, v \vDash \exists x\varphi$ אם קיימת $x$-וריאנט $v'$ של $v$ כך ש-$M, v' \vDash \varphi$.

## עובדות (1 ו-2 להוכיח כתרגיל)

1. אם $v_1[x] = v_2[x]$ עבור כל משתנה חופשי, $x$, של $\varphi$ אז $M, v_1 \vDash \varphi$ אמ"ם $M, v \vDash \varphi$. בפרט, אם $\varphi$ פסוק אז ערך האמת שלו במבנה אינו תלוי בהשמה, כלומר או ש-$M, v \vDash \varphi$ לכל השמה $v$ או ש-$M, v \nvDash \varphi$ לכל השמה $v$.
2. משפט ההחלפה עבור נוסחאות: נניח $s_1$ ו-$s_2$ חופשיים להצבה עבור $x$ בנוסחא $\varphi$ ו-$v[s_1] = v[s_2]$.
אז $M, v \vDash \varphi\{s_1/x\}$ אמ"ם $M, v \vDash \varphi\{s_2/x\}$.
3. <u>משפט ההצבה עבור נוסחאות</u>: נניח $x_1, \ldots, x_n$ משתנים שונים זה מזה, $s_1, \ldots, s_n$ שמות עצם כך ש-$s_i$ חופשי להצבה עבור $x_i$ ב-$\varphi$ ($i \in \{1, \ldots, n\}$) ותהי $v$ השמה. אז $M, v \vDash \varphi\{s_1/x_1, \ldots, s_n/x_n\}$ אמ"ם $M, v_{\vec{s}} \vDash \varphi$ כש-$v_{\vec{s}}$ מוגדרת כמו במשפט ההצבה עבור שמות עצם (תזכורת: שם עצם $t$ חופשי להצבה עבור משתנה $x$ בנוסחא $\varphi$ אם שום מופע של משתנה חופשי של $t$ אינו הופך לקשור בעקבות ההצבה).

משפט ההצבה עבור $n=1$

אם $M$ מבנה, $v$ השמה, $\varphi$ נוסחא, $x$ משתנה ו-$s$ ש"ע חופשי להצבה עבור $x$ ב-$\varphi$ אז $M,v\vDash\varphi\{s/x\}$ אמ"ם $M,v_s\vDash\varphi$ כאשר

$$v_s[y] \;=\; \begin{cases} v[s] & y=x \\ v[y] & y\neq x \end{cases}$$

<u>הוכחה (חלקית)</u>: באינדוקציה על מבנה $\varphi$.

- <u>בסיס האינדוקציה</u>: $\varphi=p(t_1,\dots,t_n)$ עבור $p$ (סימן יחס $n$-מקומי) ו-$t_1,\dots t_n$ (שמות עצם) כלשהם. אז:

$$\begin{aligned}
&M,v\vDash\varphi\{s/x\}\Leftrightarrow && \\
&\Leftrightarrow M,v\vDash p(t_1\{s/x\},\dots,t_n\{s/x\})\Leftrightarrow && \text{לפי הגדרה של הצבה} \\
&\Leftrightarrow \langle v[t_1\{s/x\}],\dots,v[t_n\{s/x\}]\rangle\in I[p]\Leftrightarrow && \text{לפי הגדרה של } \vDash \\
&\Leftrightarrow \langle v_s[t_1],\dots,v_s[t_n]\rangle\in I[p]\Leftrightarrow && \text{לפי משפט ההצבה עבור שמות עצם} \\
&\Leftrightarrow M,v_s\vDash p(t_1,\dots,t_n)\Leftrightarrow && \text{לפי הגדרה של } \vDash \\
&\Leftrightarrow M,v_s\vDash\varphi && \text{שהרי } \varphi=p(t_1,\dots,t_n)
\end{aligned}$$

- <u>הנחת האינדוקציה</u>: עבור כל $M$, כל $v$ וכל נוסחא $\psi$ שסיבוכיותה נמוכה מזו של $\varphi$ (סיבוכיות - מספר הקשרים והכמתים ב-$\varphi$) מתקיים שאם $x$ משתנה ו-$s$ ש"ע חופשי להצבה עבור $x$ ב-$\varphi$ אז $M,v_s\vDash\psi$ אמ"ם $M,v\vDash\psi\{s/x\}$.

- <u>צעד האינדוקציה</u>: יהי $M$ מבנה ($M=\langle D,I\rangle$) ו-$v$ השמה ב-$M$.
  - $\varphi=\neg\psi$, אז $\varphi\{s/x\}=(\neg\psi)\{s/x\}=\neg(\psi\{s/x\})$ ולכן:

$$\begin{aligned}
&M,v\vDash\varphi\{s/x\}\Leftrightarrow && \\
&\Leftrightarrow M,v\nvDash\psi\{s/x\}\Leftrightarrow && \text{לפי הגדרת } \vDash \\
&\Leftrightarrow M,v_s\nvDash\psi\Leftrightarrow && \text{לפי הנחת האינדוקציה} \\
&\Leftrightarrow M,v_s\vDash\varphi && \text{לפי הגדרת } \vDash
\end{aligned}$$

  - בצורה דומה עבור $\varphi=(\psi_1\wedge\psi_2)$, $\varphi=(\psi_1\vee\psi_2)$ ו-$\varphi=(\psi_1\to\psi_2)$.
  - $\varphi=\forall z\psi$. נוכיח כיוון אחד והכיוון השני מוכיחים בצורה דומה. נניח $M,v_s\vDash\varphi$ ונוכיח $M,v\vDash\varphi\{s/x\}$. ישנם שני מקרים:
    * $z=x$ ואז $\varphi=\forall x\psi$. לכן $x$ אינו חופשי להצבה ב-$\varphi$ ולכן $\varphi=\varphi\{s/x\}$. כמו כן, במקרה זה $v$ ו-$v_s$ מסכימות לגבי כל המשתנים החופשיים של $\varphi$ ולפי למה קודמת: $M,v\vDash\varphi\Leftrightarrow M,v_s\vDash\varphi$.
    * $z\neq x$ ואז $\varphi\{s/x\}=\forall z.\psi\{s/x\}$. כמו כן נתון ש-$s$ חופשי להצבה במקום $x$ ב-$\varphi$ ופירוש הדבר ש-$z$ אינו מופיע ב-$s$ או של-$x$ אין מופעים חופשיים ב-$\varphi$. אם ל-$x$ אין מופעים חופשיים ב-$\varphi$, הטיפול הוא בדיוק כמו במקרה $z=x$. נניח איפוא ש-$z$ אינו מופיע ב-$s$. אנו מניחים $M,v_s\vDash\forall z\psi$ ורוצים להוכיח $M,v\vDash\forall z.\psi\{s/x\}$, כלומר צריך להוכיח שלכל $z$-וריאנט $v'$ של $v$ מתקיים $M,v'\vDash\psi\{s/x\}$. תהי $v'$ השמה כזו. כיוון ש-$z$ אינו מופיע ב-$s$, אז $v$ ו-$v'$ מסכימות לכל המשתנים המופיעים ב-$s$ ומכאן ש-$v[s]=v'[s]$. לפי הנחת האינדוקציה עבור $\psi$, $M,v'\vDash\psi\{s/x\}$ אמ"ם $M,v'_s\vDash\psi$. אבל אנחנו מניחים ש-$M,v_s\vDash\forall z\psi$ ולכן $\psi$ נכון ב-$M$ לכל $z$-וריאנט של $v_s$. אבל $v'_s$ הוא $z$-וריאנט של $v_s$ כי $v'_s[x]=v'[s]=v[s]=v_s[x]$ (ולמשתנה $y$ אחר כך ש-$y\neq z$ ו-$y\neq x$ מתקיים $v'_s[y]=v'[y]=v[y]=v_s[y]$) ולכן $M,v'_s\vDash\psi$. לכן, לפי הנחת האינדוקציה לגבי $\psi$, מתקיים $M,v'\vDash\psi\{s/x\}$ כמו שרצינו להוכיח.
  - $\varphi=\exists z\psi$ בצורה דומה.