לוגיקה למדעי המחשב - הרצאה 6

תחשיב פרדיקטים / לוגיקה מסדר ראשון - Predicate Calculus / First Order Logic

קישור wikipedia: http://en.wikipedia.org/wiki/First-order_predicate_calculus

שני הבדלים יסודיים מתחשיב הפסוקים:

- תחשיב הפרדיקטים נכנס ביתר פירוט למבנה של נוסחאות אטומיות.
- פרט לקשרים משתמשים גם בכמתים: $\forall, \exists$.

שפות מסדר ראשון

א"ב

1. החלק המשותף לכל השפות מסדר ראשון:
   (א) משתנים: $v_0, v_1, v_2, \ldots$
   (ב) קשרים: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$
   (ג) כמתים: $\forall, \exists$
   (ד) סוגריים: (ו-).

נשתמש ב-x, y, z (עם או בלי אינדקסים) כמטה-משתנים עבור המשתנים של תחשיב הפרדיקטים.
אם x הוא מטה-משתנה כזה, אז ערכו יכול להיות לדוגמא v_1.

2. החלק המיוחד לכל שפה מסדר ראשון נקרא סיגנטורה (חתימה) של אותה שפה ויכול לכלול:
   (א) קבועים: $c_0, c_1, c_2, \ldots$ (סימון: $c_i : \iota$).
   (ב) סימני פונקציה, כל אחד עם ה-arity שלו: f_i^n (סימון: $f_i^n : \iota^n \rightarrow \iota$)
   (ג) סימני יחס (לפחות אחד), כל אחד עם ה-arity שלו: p_i^n (סימון: $p_i^n : \iota^n \rightarrow o$)

   (arity - מספר הארגומנטים של הפונקציה/יחס).

שפה מסדר ראשון נקבעת לחלוטין ע"י הסיגנטורה שלה.
נסמן ב-$L(\sigma)$ את השפה מסדר ראשון שנקבעת ע"י הסיגנטורה σ.

דוגמאות

<u>הסיגנטורה של תורת המספרים - σ_{PA}</u>

קבוע (c_0)	$0 \in \iota$
סימן פונקציה (f_0^1)	$S : \iota \to \iota$
סימן פונקציה (f_0^2)	$+ : \iota^2 \to \iota$
סימן פונקציה (f_1^2)	$\times : \iota^2 \to \iota$
סימן יחס (p_0^2)	$=: \iota^2 \to o$
סימן יחס (p_1^2)	$<: \iota^2 \to o$

<u>הסיגנטורה של הגיאומטריה האוקלידית σ_{Euc}</u>

סימן יחס (חד–מקומי)	$\text{Line} : \iota \to o$
סימן יחס (חד–מקומי)	$\text{Point} : \iota \to o$
סימן יחס (דו–מקומי)	$=: \iota^2 \to o$
סימן יחס (דו–מקומי)	$\text{On} : \iota^2 \to o$
סימן יחס (תלת–מקומי)	$\text{Between} : \iota^3 \to o$
סימן יחס (ארבעה–מקומי)	$\approx: \iota^4 \to o$

<u>סיגנטורה של תורת הקבוצות σ_{Set}</u>

קבוע	$\emptyset : \iota$
קבוע	$N : \iota$
סימן פונקציה (דו–מקומי)	$\cup : \iota^2 \to \iota$
סימן פונקציה (דו–מקומי)	$\cap : \iota^2 \to \iota$
סימן יחס (דו–מקומי)	$\in: \iota^2 \to o$
סימן יחס (דו–מקומי)	$=: \iota^2 \to o$
סימן יחס (דו–מקומי)	$\subseteq: \iota^2 \to o$

הגדרת $L(\sigma)$

בשפה מסדר ראשון יש שתי קטיגוריות דקדוקיות:

- שמות עצם (ש"ע - terms) - ι (iota).
- נוסחאות - o (omicron).

<u>שמות העצם של $L(\sigma)$</u>

- כל קבוע של σ הוא ש"ע של $L(\sigma)$.
- כל משתנה של σ הוא ש"ע של $L(\sigma)$.
- אם $f : \iota^n \to \iota$ סימן פונקציה n-מקומי של σ ו-$t_1, t_2, \ldots, t_n$ ש"ע של $L(\sigma)$, אז $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ ש"ע של $L(\sigma)$.

נשתמש ב-s, t כמשתנים עבור שמות עצם.

<u>הנוסחאות של $L(\sigma)$</u>

- אם $p : \iota^n \to o$ סימן יחס n-מקומי של $L(\sigma)$ ו-$t_1, t_2, \ldots, t_n$ ש"ע של $L(\sigma)$, אז $p(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ נוסחא של $L(\sigma)$. לנוסחאות כאלה קוראים נוסחאות אטומיות.
- אם φ ו-ψ נוסחאות אז כך גם $\neg\varphi$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \to \psi)$.
- אם φ נוסחא ו-x משתנה אז $\forall x\varphi$ ו-$\exists x\varphi$ נוסחאות.

מופעים חופשיים וקשורים של משתנים

<u>שמות עצם:</u> כל מופע של משתנה בש"ע בשפה מסדר ראשון הוא חופשי במסגרת אותו ש"ע. נסמן ב-$F_v(t)$ את קבוצת המשתנים המופיעים ב-t. כאשר $F_v(t)=\emptyset$ אז t נקרא שם עצם סגור (ש"ס). $2+3$ למשל, הוא ש"ס, בעוד ש-$2+v_2$ אינו ש"ס.

<u>נוסחאות:</u>

- כל משתנה המופיע בנוסחא אטומית הינו חופשי באותה נוסחא (בכל מקום בו הוא מופיע).
- מופע חופשי של משתנה x בנוסחא φ הוא גם מופע חופשי של אותו משתנה ב-$\neg\varphi, (\varphi\wedge\psi), (\psi\wedge\varphi)$ וכן הלאה... כנ"ל לגבי מופעים קשורים של x.
- כל מופע חופשי של משתנה y השונה מ-x בנוסחא φ נשאר חופשי בנוסחאות $\forall x\varphi$ ו-$\exists x\varphi$. כנ"ל לגבי מופעים קשורים של y כזה וגם של x עצמו. לעומת זאת, כל המופעים החופשיים של x ב-φ הופכים להיות קשורים ב-$\forall x\varphi$ ו-$\exists x\varphi$. נסמן ב-$F_v(\varphi)$ את קבוצת המשתנים שיש להם מופעים חופשיים ב-φ. אם $F_v(\varphi)=\emptyset$ אז φ נקראת נוסחא סגורה, או פסוק.

הצבה

<u>הגדרה:</u> יהיו $x_1,x_2,\ldots,x_n$ משתנים שונים זה מזה, $s_1,s_2,\ldots,s_n$ ש"ע, t ש"ע ו-φ נוסחא. נסמן $t\{s_1/x_1,\ldots,s_n/x_n\}$ ($\varphi\{s_1/x_1,\ldots,s_n/x_n\}$) את שם העצם (נוסחא) המתקבל מ-t ע"י שמציבים באופן סימולטני את s_i במקום המופעים החופשיים של x_i ב-t (φ).

<u>הגדרה פורמלית במקרה $n=1$</u>

- <u>שמות עצם</u>
  - אם t קבוע אז $t\{s/x\}=t$.
  - אם t הוא המשתנה y אז $t\{s/x\}=\begin{cases} s & y=x \\ t & y\neq x\end{cases}$.
  - אם $t=f(t_1,t_2,\ldots,t_k)$ אז $t\{s/x\}=f(t_1\{s/x\},t_2\{s/x\},\ldots,t_k\{s/x\})$.
- <u>נוסחאות</u>
  - אם $p:\iota^n\to o$ ו-$\varphi=p(t_1,t_2,\ldots,t_k)$ אז $\varphi\{s/x\}=p(t_1\{s/x\},t_2\{s/x\},\ldots,t_k\{s/x\})$.
  - $[\neg\varphi]\{s/x\}=\neg[\varphi\{s/x\}]$, ו-$[\varphi\diamond\psi]\{s/x\}=[\varphi\{s/x\}]\diamond[\psi\{s/x\}]$ עבור $\diamond\{\wedge,\vee,\to\}$.
  - $[\circ z\varphi]\{s/x\}=\begin{cases} \circ z\varphi & x=z \\ \circ z[\varphi\{s/x\}] & x\neq z\end{cases}$ עבור $\circ\in\{\forall,\exists\}$.

<u>תרגיל:</u> הוכח כי אם x,y משתנים שונים, t ו-s ש"ע, φ נוסחא ו-t חופשי להצבה עבור x ב-φ אז $\varphi\{t/x\}\{s/y\}=\varphi\{[t\{s/y\}]/x,s/y\}$ (מדגים את ההבדל בין הצבה סדרתית לסימולטנית).