לוגיקה למדעי המחשב - הרצאה 5

הגדרות

- **סקוונט (Sequent)** - יצור סינטקטי מהצורה "$\Gamma \Rightarrow \varphi$" כאשר φ נוסחא, Γ קבוצה סופית של נוסחאות ו-$\Rightarrow$ סימן.
- **NDC** - מערכת דדוקציה טבעית עבור לוגיקה קלאסית.
- **הוכחה ב-NDC** של סקוונט - סדרה $\Gamma_1 \Rightarrow \varphi_1, \Gamma_2 \Rightarrow \varphi_2, \ldots, \Gamma_n \Rightarrow \varphi_n$ שכל איבר בה הוא או אקסיומה של NDC או מתקבל מאיברים קודמים בסדרה בעזרת אחד מ-10 הכללים של NDC. סדרה כזו נקראת הוכחה ב-NDC של האיבר האחרון שלה, $\Gamma_n \Rightarrow \varphi_n$.
- **סימון** $\vdash_{NDC} \Gamma \Rightarrow \varphi$ - פרושו שלסקוונט $\Gamma \Rightarrow \varphi$ יש הוכחה ב-NDC.

יחס הנביעה (על נוסחאות בשפת תחשיב הפסוקים) $\vdash_{NDC}$

$T \vdash_{NDC} \varphi$ **אם קיימת** $\Gamma \subseteq T$ **סופית כך ש-**$\vdash_{NDC} \Gamma \Rightarrow \varphi$.

<u>תרגילי בית</u>: להוכיח ישירות (ללא שימוש בעובדה ש-$\vdash_{NDC} = \vdash_{HPC}$):

1. $\vdash_{NDC}$ הוא יחס נביעה.
2. תקפות NDC: אם $T \vdash_{NDC} \varphi$ אז $\vdash_{CPL}$.

משפט: $\vdash_{NDC} = \vdash_{HPC}$

<u>הוכחה</u>:

- נניח $T \vdash_{HPC} \varphi$ ונראה כי $T \vdash_{NDC} \varphi$. נניח $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ הוכחה של φ מ-T ב-HPC ($\varphi = \varphi_n$). נוכיח באינדוקציה על i ($1 \leq i \leq n$) ש-$T \vdash_{NDC} \varphi_i$.
  - בסיס האינדוקציה: $i = 1$. $\varphi_1 \in T$ או φ_1 אקסיומה של HPC.
    - אם $\varphi_1 \in T$ אז $\{\varphi_1\} \subseteq T$ ו-$\{\varphi_1\} \Rightarrow \varphi_1$ אקסיומה של NDC, כלומר יש $\Gamma \subseteq T$ סופית כך ש-$\vdash_{NDC} \Gamma \Rightarrow \varphi_1$ ($\Gamma = \{\varphi_1\}$) לכן $T \vdash_{NDC} \varphi_1$.
    - אם φ_1 אקסיומה של HPC אז מראים ש-$\vdash_{NDC} \emptyset \Rightarrow \varphi_1$. מכיוון ש-$\emptyset \subseteq T$ סופית אז נובע מזה ש-$T \vdash_{NDC} \varphi_1$. נוכיח לדוגמא את $I2$, $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$:

	נוסחא	הוסק מ:	הנחות רקע
1	$A \to (B \to C)$	הנחה	1
2	$A \to B$	הנחה	2
3	A	הנחה	3
4	$B \to C$	1,3 ע"י $\to E$	1,3
5	B	2,3 ע"י $\to E$	2,3
6	C	4,5 ע"י $\to E$	1,2,3
7	$A \to C$	6 ע"י $\to I$	1,2
8	$(A \to B) \to (A \to C)$	7 ע"י $\to I$	1
9	$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$	8 ע"י $\to I$	$\emptyset$

  - הנחת האינדוקציה: לכל $j < i$ מתקיים $T \vdash_{NDC} \varphi_j$. נראה כי $T \vdash_{NDC} \varphi_i$.
  - מעבר האינדוקציה: אם $\varphi_i \in T$ או φ_i אקסיומה של HPC, ההוכחה זהה למקרה $i = 1$. נותרה האפשרות ש-φ_i מתקבל מ-φ_j ו-φ_k ($j, k < i$) בעזרת MP, כלומר, למשל, $\varphi_j = \varphi_k \to \varphi_i$. לפי הנחת האינדוקציה, $T \vdash_{NDC} \varphi_j$ ו-$T \vdash_{NDC} \varphi_k$ ולכן קיימות $\Delta_1, \Delta_2 \subseteq T$ סופיות כך ש-$\vdash_{NDC} \Delta_1 \Rightarrow \varphi_k \to \varphi_i$ ו-$\vdash_{NDC} \Delta_2 \Rightarrow \varphi_k$. נבנה הוכחה חדשה ב-NDC כדלקמן:

$$\underbrace{\ldots, \Delta_1 \Rightarrow \varphi_k \to \varphi_i}_{\text{proof of } \Delta_1 \Rightarrow \varphi_k \to \varphi_i}, \quad \underbrace{\ldots, \Delta_2 \Rightarrow \varphi_k}_{\text{proof of } \Delta_2 \Rightarrow \varphi_k}, \quad \Delta_1 \cup \Delta_2 \Rightarrow \varphi_i$$

קיבלנו הוכחה ב-NDC של $\Delta_1 \cup \Delta_2 \Rightarrow \varphi_i$ וכיוון ש-$\Delta_1 \cup \Delta_2 \subseteq T$ וסופית, אז $T \vdash_{NDC} \varphi_i$.

- נניח $T \vdash_{NDC} \varphi$ ונראה כי $T \vdash_{HPC} \varphi$. מספיק להראות את הלמה הבאה: אם $\Gamma \Rightarrow \varphi \vdash_{NDC}$ אז $\Gamma \vdash_{HPC} \varphi$. אכן, אם $T \vdash_{NDC} \varphi$ אז יש $\Gamma \subseteq T$ סופית כך ש-$\Gamma \Rightarrow \varphi \vdash_{NDC}$, וכיוון ש-$\Gamma \subseteq T$ (ו-$\vdash_{HPC}$ יחס נביעה) אז $T \vdash_{HPC} \varphi$.

הוכחת הלמה: נניח $\Gamma \Rightarrow \varphi \vdash_{NDC}$ אז יש ל-$\Gamma \Rightarrow \varphi$ סדרת הוכחה ב-NDC: $\Gamma_1 \Rightarrow \varphi_1, \ldots, \Gamma_n \Rightarrow \varphi_n$ ($\Gamma_n = \Gamma, \varphi_n = \varphi$). נוכיח באינדוקציה על i ($1 \leq i \leq n$) ש-$\Gamma_i \vdash_{HPC} \varphi_i$.

  - בסיס האינדוקציה: $i = 1$. במקרה זה $\Gamma_1 \Rightarrow \varphi_1$ חייבת להיות אקסיומה של NDC, כלומר $\varphi_1 \in \Gamma_1$ ולכן $\Gamma_1 \vdash_{HPC} \varphi_1$.
  - הנחת האינדוקציה: לכל $j < i$ מתקיים $\Gamma_j \vdash_{HPC} \varphi_j$.
  - מעבר האינדוקציה: אם $\Gamma_i \Rightarrow \varphi_i$ אקסיומה אז ההוכחה כמו במקרה $i = 1$. אחרת $\Gamma_i \Rightarrow \varphi_i$ נובע מאיברים קודמים בסדרה בעזרת אחד מכללי ההיסק של NDC. וההוכחה מתפצלת לעשרה מקרים. נעשה כדוגמא את המקרים הקשורים בשימוש בכללי השלילה. השאר - תרגיל.
    * נניח $\Gamma_i \Rightarrow \varphi_i$ התקבל מ-$\Gamma_j \Rightarrow \varphi_j$ ($j < i$) בעזרת $\neg E$. פירוש הדבר ש-$\Gamma_i = \Gamma_j$ ו-$\varphi_j = \neg\neg\varphi_i$. לפי הנחת האינדוקציה על j, $\Gamma_j \vdash_{HPC} \varphi_j$, כלומר $\Gamma_i \vdash_{NDC} \neg\neg\varphi_i$. כיוון ש-$\neg\neg\varphi_i \rightarrow \varphi_i$ אקסיומה של HPC, נובע מזה בקלות ש-$\Gamma_i \vdash_{HPC} \varphi_i$.
    * $\Gamma_i \Rightarrow \varphi_i$ הוסק מ-$\Gamma_j \Rightarrow \varphi_j$ ו-$\Gamma_k \Rightarrow \varphi_k$ בעזרת $\neg I$. לכן $\varphi_i = \neg\psi$ לאיזה ψ, ויש θ כך ש-$\varphi_j = \theta, \varphi_k = \neg\theta$. כמו כן $\Gamma_j = \Delta_1 \cup \{\psi\}$ ו-$\Gamma_k = \Delta_2 \cup \{\psi\}$ לאיזושהן קבוצות Δ_1, Δ_2. לפי הנחת האינדוקציה עבור j ו-k נקבל לכן $\{\psi\} \cup \Delta_1 \vdash_{HPC} \theta$ ו-$\{\psi\} \cup \Delta_2 \vdash_{HPC} \neg\theta$. לכן $\Delta_1 \vdash_{HPC} \psi \rightarrow \theta$ ו-$\Delta_2 \vdash_{HPC} \psi \rightarrow \neg\theta$ (לפי משפט הדדוקציה של HPC). בעזרת $N1$ נקבל לכן ש-$\Delta_1 \cup \Delta_2 \vdash_{HPC} \neg\psi$. אבל $\Delta_1 \cup \Delta_2 \subseteq \Gamma_j \cup \Gamma_k$ ולכן $\Gamma_j \cup \Gamma_k \vdash_{HPC} \neg\psi$ וזה מה שרצינו להוכיח.

מסקנות

- $\vdash_{NDC}$ יחס נביעה.
- תקפות ושלמות של NDC ($\vdash_{NDC} = \vdash_{HPC} = \vdash_{CPL}$).

<u>תרגיל</u>: המערכת NDI מתקבל מ-NDC ע"י החלפת הכלל $\frac{\Gamma\Rightarrow\neg\neg A}{\Gamma\Rightarrow A}$ בכלל $\frac{\Gamma_1\Rightarrow A \qquad \Gamma_2\Rightarrow\neg A}{\Gamma_1\cup\Gamma_2\Rightarrow B}$. הוכח כי $\vdash_{NDI}=\vdash_{HPI}$.

<u>הערה</u>: מציאת הוכחות של סקוונטים היכיחים ב-NDI היא בדרך כלל קלה. לכן סקוונטים תקפים קלאסית שקשה למצוא הוכחה שלהם ב-NDC הם כמעט תמיד סקוונטים שאינם תקפים אינטואיציוניסטית. סקוונטים כאלה אפשר להוכיח ב-NDC רק באמצעות כללי השלילה, ובדרך כלל בדרל השלילה. הנה דוגמא להוכחה כזו:

$$\begin{tikzcd}
\neg A, A, \neg B \Rightarrow \neg A \arrow[dr] & & \neg A, A, \neg B \Rightarrow A \arrow[dl] & & \\
& \neg A, A \Rightarrow \neg\neg B \arrow[d] & & & \\
& \neg A, A \Rightarrow B \arrow[d] & & & \\
& \neg A \Rightarrow A \to B \arrow[dr] & & \neg A, \neg(A \to B) \Rightarrow \neg(A \to B) \arrow[dl] & \\
& & \neg(A \to B) \Rightarrow \neg\neg A \arrow[d] & & \\
& & \neg(A \to B) \Rightarrow A & &
\end{tikzcd}$$

כללי שלילה חשובים נוספים:

- $\frac{\Gamma\Rightarrow A \qquad \Gamma_2\Rightarrow\neg A}{\Gamma_1\cup\Gamma_2\Rightarrow B}$
- $\Gamma \Rightarrow \neg A \vee A$
- $\frac{\Gamma_1\Rightarrow\neg A \qquad \Gamma_2\Rightarrow A\vee B}{\Gamma_1\cup\Gamma_2\Rightarrow B}$
- $\frac{\Gamma_1\Rightarrow\neg A \qquad \Gamma_2\Rightarrow\neg B}{\Gamma_1\cup\Gamma_2\Rightarrow\neg(A\vee B)}$

השימוש בכללים אלו כ"מאקרו" יכול לקצר (ולהקל על מציאת) הוכחות ב-NDC הקשורות בשלילה. נשים לב שמארבעת הכללים הללו רק $\Gamma \Rightarrow \neg A \vee A$ (חוק השלישי הנמנע) אינו תקף אינטואיציוניסטית ולכן לא יכיח ב-NDI.

שקילויות לוגיות

קישור wikipedia: http://en.wikipedia.org/wiki/Logical_equivalence

הגדרה

$A \leftrightarrow B =_{Df} (A \to B) \wedge (B \to A)$.

עובדה קלה לבדיקה: אם v השמה אז $v(A \leftrightarrow B) = t$ אמ"ם $v(A) = v(B)$.

<u>מסקנה (תרגיל)</u>: אם $T \vdash_{CPL} A \leftrightarrow B$ אז לכל נוסחא φ ופסוק אטומי p מתקיים $T \vdash_{CPL} \varphi\{A/p\} \leftrightarrow \varphi\{B/p\}$ (משפט הצבת אקויולנטים).

<u>תרגיל נוסף</u>: להוכיח שמשפט הצבת האקויולנטים נכון גם עבור HPI.

הגדרה

שני פסוקים A ו-B שקולים לוגית ($A \equiv B$) אם $\vdash_{CPL} A \leftrightarrow B$.

אקויולנציות (שקילויות) חשובות

1. (א) $A \equiv \neg\neg A$ (שלילה כפולה)
   (ב) $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$ (דה-מורגן)
   (ג) $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ (דה-מורגן)
   (ד) $\neg(A \to B) \equiv A \wedge \neg B$
2. (א) $A \to B \equiv \neg A \vee B$
   (ב) $A \vee B \equiv \neg A \to B$
   (ג) $A \wedge B \equiv \neg(A \to \neg B)$
3. (א) $A \vee A \equiv A$, $A \wedge A \equiv A$ (אידמפוטנטיות)
   (ב) $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$, $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$ (אסוציאטיביות)
   (ג) $A \vee B \equiv B \vee A$, $A \wedge B \equiv B \wedge A$ (קומוטטביות)
4. (א) $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$, $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C)$ (דיסטריבוטיביות)
   (ב) $A \vee (A \wedge B) \equiv A$, $A \wedge (A \vee B) \equiv A$ (בליעה)
5. (א) $A \to (B \to C) \equiv A \wedge B \to C$
   (ב) $A \to (B \wedge C) \equiv (A \to B) \wedge (A \to C)$
   (ג) $(A \vee B) \to C \equiv (A \to C) \wedge (B \to C)$
   (ד) $(\neg A \to \neg B) \equiv B \to A$
6. $A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$

<u>הגדרה</u>: נוסחא φ היא בצורת NNF (Negation Normal Form) אם קשר השלילה מופיע בה רק לפני פסוקים אטומיים.

קישור wikipedia: http://en.wikipedia.org/wiki/Negation_normal_form.

<u>טענה</u>: כל פסוק אפשר להעביר לפסוק שקול ב-NNF. התהליך נעשה בעזרת שקילויות השלילה (קבוצה מס' 1).

הגדרות:

- ליטרל - פסוק אטומי או שלילת פסוק אטומי: $p_i, \neg p_i$ הם ליטרלים.
- פסוק הוא ב-DNF (Disjunctive Normal Form, צורה דיסיונקטיבית נורמלית) אם הוא דיסיונקציה של קוניוקציות של ליטרלים.
- פסוק הוא ב-CNF (Conjunctive Normal Form, צורה קוניוקטיבית נורמלית) אם הוא קוניוקציה של דיסיונקציות של ליטרלים.

דוגמא: $\varphi = (p_1 \wedge \neg p_3) \vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \vee (\neg p_1 \wedge p_4)$ הוא פסוק ב-DNF בעוד ש-$(\neg p_1 \vee p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_4)$ (ששקול לוגית ל-$\neg\varphi$) הוא פסוק ב-CNF.

טענה: כל פסוק ניתן להביא הן לצורת DNF והן לצורת CNF.

הגדרה: נניח φ פסוק כך ש-$At(\varphi) \subseteq \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. נגדיר את $g_\varphi^{p_1,\ldots,p_n}$ בתור הפונקציה מ-$\{t,f\}^n$ אל $\{t,f\}$ המוגדרת ע"י $g_\varphi^{p_1,\ldots,p_n}(m_1,\ldots,m_n) = v(\varphi)$ כאשר $m_i \in \{t,f\}$ לכל i ו-v השמה כך ש-$v(p_i) = m_i$.

טענה: לכל $f : \{t,f\}^n \to \{t,f\}$ אפשר למצוא נוסחא φ כך ש-$f = g_\varphi^{p_1,\ldots p_n}$.

מסקנה: $\{\neg, \vee, \wedge, \to\}$ מספיקים בשביל להגדיר כל פונקציה מ-$\{f,t\}^n$ אל $\{f,t\}$.