לוגיקה למדעי המחשב - הרצאה 12

<u>תזכורת</u>: אם L שפה עם שוויון ו-M מבנה עבור L אז קיים מבנה נורמלי M' עבור L, כך שלכל השמה v ב-M קיימת השמה v' ב-M' המקיימת $M,v\vDash\varphi$ אמ"ם $M',v'\vDash\varphi$ וזה לכל נוסחא φ.

<u>מסקנה</u>: אם T תורה בשפה עם שוויון ו-φ נוסחא באותה שפה אז $T\vdash^t_{FOL^=}\varphi$ אמ"ם $T\cup Eq(L)\vdash^t_{FOL}\varphi$.

<u>הוכחה</u>:

- נניח $T\cup Eq(L)\vdash^t_{FOL}\varphi$ ונראה ש-$T\vdash^t_{FOL^=}\varphi$. יהי אם כן $\langle M,v\rangle$ מודל נורמלי של T (כלומר M הוא מבנה נורמלי ו-$M,v\vDash T$). כיוון ש-M נורמלי אז $M\vDash Eq(L)$ ולכן $M,v\vDash T\cup Eq(L)$. לכן מהנחתנו $M,v\vDash\varphi$. הראנו לכן, שכל t-מודל נורמלי של T הוא גם t-מודל נורמלי של φ, דהיינו $T\vdash^t_{FOL^=}\varphi$.
- נניח $T\vdash^t_{FOL^=}\varphi$ ונראה $T\cup Eq(L)\vdash^t_{FOL}\varphi$. יהי איפוא $\langle M,v\rangle$ t-מודל של $T\cup Eq(L)$. לפי הטענה שהוכחנו, יש מודל נורמלי M' והשמה v' במודל זה כך שלכל ψ בשפה מתקיים

$$(*)\quad M,v\vDash\psi\quad\Leftrightarrow\quad M',v'\vDash\psi$$

ובפרט $M',v'\vDash T$ (כי $M,v\vDash\psi$ לכל $\psi\in T$). מכאן ש-$\langle M',v'\rangle$ הינו t-מודל נורמלי של T ולכן הוא גם t-מודל נורמלי של φ (לפי ההנחה $T\vdash^t_{FOL^=}\varphi$). כלומר $M',v'\vDash\varphi$ ולכן, שוב לפי $(*)$, $M,v\vDash\varphi$. סה"כ הראנו שאם $\langle M,v\rangle$ t-מודל של $T\cup Eq(L)$ אז $\langle M,v\rangle$ גם t-מודל של φ, כלומר $T\cup Eq(L)\vdash^t_{FOL}\varphi$.

<u>מסקנות נוספות (כתרגיל)</u>:

- $T\vdash^v_{FOL^=}\varphi$ אמ"ם $T\cup Eq(L)\vdash^v_{FOL}\varphi$.
- תורה T (בשפה עם שוויון) יש לה t-מודל נורמלי אמ"ם $T\cup Eq(L)$ היא t-ספיקה.
- תורה T (בשפה עם שוויון) יש לה v-מודל נורמלי אמ"ם $T\cup Eq(L)$ היא v-ספיקה.

<u>מזה נובעים בקלות</u>:

- משפט הקומפקטיות עבור $\mathrm{FOL}^=$.
- משפט סקולם לונהיים עבור $\mathrm{FOL}^=$.
- משפטי הדדוקציה עבור $\mathrm{FOL}^=$.
- חצי הכריעות של $\mathrm{FOL}^=$.

נראה לדוגמא את

<u>הוכחת משפט הקומפקטיות ללוגיקה מסדר ראשון עם שוויון</u>:

נניח $T\vdash^t_{FOL^=}\varphi$. אז $T\cup Eq(L)\vdash^t_{FOL}\varphi$ ולכן לפי משפט הקומפקטיות של FOL יש $\Gamma'\subseteq T\cup Eq(L)$ סופית כך ש-$\Gamma'\vdash^t_{FOL}\varphi$. נסמן $\Gamma\simeq\Gamma'\cap T$ ($\Gamma\subseteq T$ ו-Γ סופית). ברור ש-$\Gamma\cup Eq(L)\vdash^t_{FOL}\varphi$ (כי $\Gamma'\subseteq\Gamma\cup Eq(L)$) ולכן $\Gamma\vdash^t_{FOL^=}\varphi$.

<u>הגדרה</u>: $\mathrm{HFOL}^=$ היא המערכת נוסח הילברט המתקבלת מ-HFOL ע"י הוספת אקסיומות השוויון.

<u>משפט השלמות עבור $\mathrm{HFOL}^=$</u>: $T\vdash^v_{FOL^=}\varphi$ אמ"ם $T\vdash^t_{HFOL^=}$.

תזכורת: $T\vdash_{NDFOL}\varphi$ אמ"ם $\vdash_{NDFOL}\Gamma\Rightarrow\varphi$ עבור $\Gamma\subseteq T$ סופית. לכן דרך אחת להשתמש בדדוקציה טבעית ללוגיקה מסדר ראשון עם שוויון היא להגדיר ש-$T\vdash_{NDFOL^=}\varphi$ אמ"ם יש $\Gamma\subseteq T\cup Eq(L)$ סופית כך ש-$\vdash_{NDFOL}\Gamma\Rightarrow\varphi$. גישה נוספת היא להוסיף את $\Rightarrow s=s$ בתור סכימה וכן את כלל הצבה הבא (ידוע גם בתור כלל הפרמודולציה):

$$\frac{\Gamma_1\Rightarrow s=t\quad\Gamma_2\Rightarrow\varphi}{\Gamma_1\cup\Gamma_2\Rightarrow\varphi'}$$

כש-φ' מתקבלת מ-φ ע"י החלפת מופעים של s ב-t בהגבלות על כלל ההצבה שיפורטו בהמשך, בהקשר של t-נביעה.

הצבות

.1

$$s_1=t_1,\dots,s_n=t_n \quad \vdash_{FOL^=} \quad t\{s_1/x_1,\dots,s_n/x_n\}=t\{t_1/x_1,\dots,t_n/x_n\}$$

מעשית, פירוש הדבר שאם t'' מתקבל מ-t' ע"י החלפת מופעים של s_i ב-t_i ($i=1,\dots,n$) אז

$$s_1=t_1,\dots,s_n=t_n \quad \vdash_{FOL^=} \quad t'=t''$$

2. אם φ ו-φ' נוסחאות ו-φ' מתקבל מ-φ ע"י החלפת מופעים של s_i ב-t_i ($i=1,\dots,n$) אז

$$s_1=t_1,\dots,s_n=t_n \quad \vdash^v_{FOL^=} \quad \varphi\leftrightarrow\varphi'$$

3. אם $t_1,\dots,t_n$ ו-$s_1,\dots,s_n$ חופשיים להצבה עבור $x_1,\dots,x_n$ (בהתאמה) אז

$$s_1=t_1,\dots,s_n=t_n \quad \vdash^t_{FOL^=} \quad \varphi\{s_1/x_1,\dots,s_n/x_n\}\leftrightarrow\varphi\{t_1/x_1,\dots,t_n/x_n\}$$

במילים אחרות, אם אף מופע של משתנה המופיע ב-s_i אינו קשור ב-φ ואף מופע של משתנה המופיע ב-t_i אינו קשור ב-φ', ו-φ' מתקבל מ-φ ע"י החלפת מופעים של s_i ב-t_i ($i=1,\dots,n$) אז

$$s_1=t_1,\dots,s_n=t_n \quad \vdash^t_{FOL^=} \quad \varphi\leftrightarrow\varphi'$$

כוח הביטוי של לוגיקה מסדר ראשון

פונקציות חלקיות (בניגוד למלאות)

משתמשים באופן רשמי ב-default value (ברירת מחדל) ובאופן מעשי הוא לא משנה.

הרחבה (של השפה) ע"י הגדרות (Extension by definitions)

1. הוספת סימני יחס - נניח T תורה בשפה L, φ נוסחא ב-L ונניח ש-$Fv(\varphi)=\{x_1,\dots,x_n\}$. ניצור שפה חדשה L' ע"י הוספת סימן יחס n מקומי חדש p, נוסיף ל-T את האקסיומה $\forall x_1\dots\forall x_n\left(p\left(x_1,\dots,x_n\right)\leftrightarrow\varphi\right)$ ונקבל כך תורה חדשה T' (בשפה L'). T' תהיה אז <u>הרחבה משמרת</u> (conservative) של T, דהיינו אם φ היא בשפה L המקורית אז $T\vdash_{FOL}\varphi$ אמ"ם $T'\vdash_{FOL}\varphi$.

2. יהיו L ו-T כנ"ל ונניח כי $\forall x_1\dots\forall x_n\exists y.\varphi$ הינו פסוק הנובע מ-T. ניצור שפה חדשה L' ע"י שנוסיף ל-L סימן פונקציה n-מקומי חדש f וניצור תורה T' ב-L' המתקבלת מ-T ע"י הוספת האקסיומה $\forall x_1\dots\forall x_n\varphi\{f(x_1,\dots,x_n)/y\}$. T' היא אז הרחבה משמרת של T.

   פרטים נוספים וצורות אחרות - ראו בספר של שוינפלד.

גורם הזמן

אם רוצים להכניס אותו אז אפשר להפוך כל סימן יחס n-מקומי p לסימן יחס $(n+1)$-מקומי p' כשהמשמעות שמתכוונים אליה היא ש-$p'(x_1,\dots,x_n,t)$ נכון אמ"ם $p(x_1,\dots,x_n)$ נכון בזמן t.

לוגיקה רב-סוגית

במקום סוג אחד של עצמים, יכולים להיות מספר סוגים, $s_1,\ldots,s_n$. לכל ש"ע יש סוג (אחד מהסוגים הנ"ל). סיגנטורה נותנת לכל סימן יחס ולכל וסימן פונקציה אינפורמציה לגבי איזה סוגי עצמים הוא מקבל ולכל סימן פונקציה גם איזה סוג הוא מחזיר.

<u>דוגמא</u>: שפה עבור מרחבים ווקטוריים.

סוגים: $s\,(\mathrm{calar})\,, v\,(\mathrm{ector})$.

קבועים: $0_s : s,\ 0_v : v$

סימני פונקציה: $+_s : s\times s \to s,\ +_v : v\times v\to v,\ \cdot_s : s\times s\to s,\ \cdot : s\times v\to v$

סימני יחס: $=_s\colon s\times s\to o,\ =_v\colon v\times v\to o$

<u>הגדרת שמות עצם</u>: מניחים שלכל סוג יש את המשתנים שלו. ה-clause העיקרי: אם $f : s_1\times\ldots\times s_n\to s$ ו-$t_1,\ldots,t_n$ ש"ע מסוגים $s_1,\ldots,s_n$ בהתאמה אז $f\,(t_1,\ldots,t_n)$ הינו ש"ע כשר מסוג s.

<u>הגדרת נוסחאות</u>: אם $p : s_1\times\ldots\times s_n\to o$ סימן יחס n-מקומי, $t_1,\ldots,t_n$ ש"ע מסוגים $s_1,\ldots,s_n$ בהתאמה, אז $p\,(t_1,\ldots,t_n)$ נוסחא בנויה כהלכה.

<u>סמנטיקה</u>: $M=\langle D_1,\ldots,D_n,I\rangle$ בהנחה שיש n סוגים $s_1,\ldots,s_n$. הגבלה הכרחית: $\bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i\neq\emptyset$.

<u>תרגום משפה רב-סוגית L לשפה חד-סוגית L'</u>

- כל משתנה של השפה הרב סוגית הופך למשתנה של השפה החד-סוגית.
- כל הקבועים, סימני היחס וסימני הפונקציה של השפה הרב-סוגית L הופכים לסימנים של L' עם ה-arity המתאים.
- עבור כל סוג s_i של L מכניסים סימן יחס חד מקומי $s_i : \iota\to o$.
- בתרגום של שמות עצם לא עושים כלום.
- בתרגום נוסחאות, מתאימים לכל נוסחא φ של L נוסחא $Tr\,(\varphi)$ באופן הבא:
  - אם φ אטומי אז $Tr\,(\varphi)=\varphi$.
  - $Tr\,(\neg\varphi)=\neg Tr\,(\varphi)$ ו-$Tr\,(\varphi\circ\psi)=Tr\,(\varphi)\circ Tr\,(\psi)$ עבור $\circ\in\{\wedge,\vee,\to\}$.
  - $Tr\,(\forall x\psi)=\forall x\,(s_i\,(x)\to Tr\,(\psi))$ כאשר s_i הוא הסוג של המשתנה x.
  - $Tr\,(\exists x\psi)=\exists x\,(s_i\,(x)\wedge Tr\,(\psi))$ כאשר s_i הוא הסוג של המשתנה x.

נניח $T\vdash_{FOL(L)}\varphi$. מזה <u>לא נובע</u> ש-$Tr\,(T)\vdash_{FOL(L')}Tr\,(\varphi)$ אלא ש-$Tr\,(T)\cup Th\,(L)\vdash_{FOL(L')}Tr\,(\varphi)$ כש-$Th\,(L)$ כוללת את הפסוקים הבאים:

1. אם $p : s_1\times\ldots\times s_n\to o$ בסיגנטורה של L אז ב-$Th\,(L)$ יהיה הפסוק $\forall x_1\ldots\forall x_n.p\,(x_1,\ldots,x_n)\to s_1\,(x_1)\wedge\ldots\wedge s_n\,(x_n)$.
2. אם $f : s_1\times\ldots\times s_n\to s$ אז $Th\,(L)$ יכלול את הפסוק $\forall x_1\ldots\forall x_n.s_1\,(x_1)\wedge\ldots\wedge s_n\,(x_n)\to s\,(f\,(x_1,\ldots,x_n))$.

הערה: (1) לא תמיד נחוץ ובכל מקרה אין כוללים אותו כאשר p הוא פרדיקט שויון.

<u>דוגמא</u>: אם לפונקציה f יש הופכי משמאל אז היא ח.ח.ע. הצרנה "טבעית" תהיה

$$\forall f\,((\exists g\forall x.g\,(f\,(x))=x)\to(\forall x_1\forall x_2.f\,(x_1)=f\,(x_2)\to x_1=x_2))$$

אך נשים לב כי זו אינה נוסחא חוקית שהרי f בה הוא משתנה ולכן (לדוגמא) $f\left(x\right)$ אינו ש"ע חוקי. עוברים אם כן ללוגיקה דו-סוגית עם סוגים R ו-F וסימן פונקציה $App : F\times R\rightarrow R$ ואז ההצרנה תהיה

$$(\varphi =)\quad \forall f\left(\left(\exists g\forall x.App\left(g,App\left(f,x\right)\right)=x\right)\rightarrow\left(\forall x_{1}\forall x_{2}.App\left(f,x_{1}\right)=App\left(f,x_{2}\right)\rightarrow x_{1}=x_{2}\right)\right)$$

תרגום לשפה מסדר ראשון:

$$\forall f.F(f)\rightarrow(\exists g(F(g)\wedge\forall xR(x)\rightarrow App(g,App(f,x))=x))\rightarrow$$

$$\forall x_{1}(R(x_{1})\rightarrow\forall x_{2}(R(x_{2})\rightarrow(App(f,x_{1})=App(f,x_{2})\rightarrow x_{1}=x_{2}))))$$

$$\equiv\forall f.F(f)\wedge(\exists gF(g)\wedge\forall x(R(x)\rightarrow App(g,App(f,x))=x))\rightarrow\forall x_{1}\forall x_{2}(R(x_{1})\wedge R(x_{2})\wedge App(f,x_{1})=App(f,x_{2})\rightarrow x_{1}=x_{2})$$

בתוספת אקסיומה $Ax:\ \forall x\forall y\left(F\left(x\right)\wedge R\left(y\right)\rightarrow R\left(App\left(x,y\right)\right)\right)$. במקרה זה $Ax\rightarrow Tr\left(\varphi\right)$ אפילו אמת לוגית, אך זה לא תמיד כך.