לוגיקה למדעי המחשב - הרצאה 11

<u>מסקנה ממשפט הרברנד</u>: אם T תורה אוניברסלית אז T אינה ספיקה אמ"ם אפשר להוכיח ממנה סתירה ב-HFOL. משפט השלמות המלא שקול לטענה שאם T אינה ספיקה אז T אינה קונסיסטנטית ב-HFOL.

<u>הסבר למסקנה</u>: לפי משפט הרברנד, אם T אוניברסלית ואינה ספיקה אפשר להסיק סתירה ב-HPC מקבוצת האינסטנציות הסגורות של איברי T (זה נובע ממשפט הרברנד יחד עם משפט השלמות של HPC). לכן T כזו אינה ספיקה רק אם אפשר להסיק סתירה ממנה בעזרת הסכימה $\forall xA \to A\{t/x\}$.

(המשך) הוכחת משפט השלמות של HFOL

אנו מוכיחים: אם T קבוצה של פסוקים, φ פסוק, $T \cup \{\varphi\}$ בשפה L ו-$T \nvdash_{HFOL} \varphi$ אז יש מודל של T שאינו מודל של φ.
סימון: בהוכחה זו נרשום $\vdash$ במקום $\vdash_{HFOL}$.

<u>צעד ראשון</u>: נוסיף לשפה אינסוף ($\aleph_0$) קבועים חדשים, $d_1, d_2, \ldots$ ונקרא לשפה החדשה L'. גם בשפה L' המורחבת מתקיים $T \nvdash_{HFOL} \varphi$. תרגיל: להוכיח זאת.

<u>צעד שני</u>: נרחיב את T לתורה T' של פסוקים בשפה L' עם שתי התכונות הבאות:

1. T' היא תורה מקסימלית בשפה L' כך ש-$T' \nvdash_{HFOL} \varphi$, כלומר $T' \nvdash \varphi$ ואם $\psi \notin T'$ אז $T' \cup \{\psi\} \vdash \varphi$.
2. T' מקיימת את תנאי הנקין: אם $\exists x\psi \in T'$ אז יש ש"ס t כך ש-$\psi\{t/x\} \in T'$.

ההרחבה תיעשה באופן אינדוקטיבי - נסדר את כל הפסוקים של L' בסדרה $\psi_1, \psi_2, \ldots$ ונגדיר באינדוקציה סדרת תורות $T_0, T_1, \ldots$ כך שלכל i, T_{i+1} מתקבל מ-T_i ע"י הוספת שני פסוקים לכל היותר ו-$T_i \nvdash \varphi$. T_i תתקבל מ-T_{i-1} באופן הבא:

1. אם $T_{i-1} \cup \{\psi_i\} \vdash \varphi$ אז $T_i = T_{i-1}$.
2. אם $T_i \cup \{\psi_i\} \nvdash \varphi$ ו-ψ_i אינה מהצורה $\exists xA$ אז $T_i = T_{i-1} \cup \{\psi_i\}$.
3. אם $\psi_i = \exists xA$ ו-$T_{i-1} \cup \{\psi_i\} \nvdash \varphi$ נבחר קבוע חדש d_j שאינו מופיע ב-T_{i-1} (יש כזה כי T_{i-1} מתקבלת מ-T ע"י הוספת מספר סופי של פסוקים ורק פסוקים נוספים אלו יכולים להכיל קבועים חדשים) ונגדיר $T_i = T_{i-1} \cup \{\psi_i, A\{d_j/x\}\}$.

נוכיח ש-$T_i \nvdash \varphi$. בשני המקרים הראשונים זה מתקיים טריוויאלית. נוכיח אם כן עבור המקרה השלישי. נניח בשלילה ש-$T_i \vdash \varphi$, כלומר $T_{i-1} \cup \{\exists xA, A\{d_j/x\}\} \vdash \varphi$. כיוון ש-$\exists xA \vdash_{HFOL} A\{d_j/x\}$ ו-$\vdash_{HFOL}$ יחס נביעה, פירוש הדבר ש-$T_{i-1} \cup \{A\{d_j/x\}\} \vdash \varphi$. לפי משפט הדדוקציה של HFOL נקבל $T_{i-1} \vdash A\{d_j/x\} \to \varphi$. יהי y משתנה שאינו מופיע בכלל בהוכחה של $A\{d_j/x\} \to \varphi$ מ-T_{i-1} (יש כזה כי ההוכחה סופית). נחליף בכל מקום בהוכחה את d_j ב-y ונקבל כך הוכחה של $T_{i-1} \vdash A\{y/x\} \to \varphi$. מזה נקבל לפי כלל ההכללה ש-$T_{i-1} \vdash \forall y (A\{y/x\} \to \varphi)$ אבל אם y אינו מופיע ב-A או ב-φ ו-x אינו חופשי ב-φ אז (הוכח כתרגיל) $\vdash_{HFOL} \forall y (A\{y/x\} \to \varphi) \to \forall x (A \to \varphi)$ ולכן $T_{i-1} \vdash \forall x (A \to \varphi)$. אבל אם x אינו מופיע חופשי ב-φ אז $\forall x (A \to \varphi) \to (\exists xA \to \varphi)$ אקסיומה של HFOL. לכן נקבל $T_{i-1} \vdash \exists xA \to \varphi$, כלומר $T_{i-1} \vdash \psi_i \to \varphi$ ולכן $T_i \cup \{\psi_i\} \vdash \varphi$ בסתירה לנתון המקורי. לכן גם במקרה זה $T_i \nvdash \varphi$.

ניקח עתה $T' = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} T_i$. הוכחת התכונה הראשונה של T' כמו בתחשיב הפסוקים. לגבי תכונת הנקין, נניח $\exists xA \in T'$ ונניח $\psi_k = \exists xA$. כיוון ש-$\psi_k \in T'$ אז $\psi_k \in T_k$ ולכן יש איזה d_j כך ש-$A\{d_j/x\} \in T_k \subseteq T'$.

<u>צעד שלישי</u>: נבנה מודל M ל-T' (שהוא גם מודל של T). המבנה M יהיה מבנה הרברנד המושרה ע"י T' (מוגדר בדיוק כמו בהוכחה של משפט הרברנד): D יהיה אוסף שמות העצם הסגורים של L', הפירוש של הקבועים וסימני הפונקציה כמו בכל מבנה הרברנד: אם p סימן יחס n-מקומי, $I[p] = \{\langle t_1, \ldots, t_n \rangle \in D^n | T' \vdash p(t_1, \ldots, t_n)\}$. באינדוקציה מוכיחים עכשיו שלכל פסוק ψ מתקיים $M \vDash \psi$ אמ"ם $\psi \in T'$:

- לפסוקים אטומיים זה נובע מההגדרה.

- למקרה של $\neg\psi, (\psi_1 \vee \psi_2), (\psi_1 \wedge \psi_2), (\psi_1 \to \psi_2)$ ההוכחה כמו בתחשיב הפסוקים.
- המקרה ש-$\varphi = \exists x A$ נובע מיידית מהנחת האינדוקציה ומתנאי הנקין.
- המקרה ש-$\varphi = \forall x A$ גם נובע מהנחת האינדוקציה ומתנאי הנקין באופן טיפה פחות מיידי (להוכיח כתרגיל).

כיוון ש-$\varphi \notin T'$ אז $M \nvDash \varphi$.

מסקנה - משפט סקולם לונהיים

אם T תורה ספיקה בלוגיקה מסדר ראשון אז ל-T יש מודל בן-מניה.

<u>הוכחה</u>: אם T ספיקה אז היא קונסיסטנטית ב-HFOL ואז ההוכחה של משפט השלמות מספקת מודל בן-מניה.

<u>מסקנה</u>: ניקח $\sigma = \langle 0, 1, +, -, *, <, = \rangle$ ותהי T קבוצת כל הפסוקים הנכונים במספרים הממשיים. T ספיקה (כי $\mathbb{R}$ מודל שלה) ולכן יש לה מודל בן-מניה (ממילא שונה מ-$\mathbb{R}$).

<u>פרדוקס סקולם</u>:

ל-ZF (תורת הקבוצות האקסיומטית) יש מודל בן-מניה (בהנחה ש-ZF קונסיסטנטית) אבל ב-ZF ניתן להוכיח שקיימות קבוצות שאינן בנות מניה.
הסבר: למעשה זה לא פרדוקס אמיתי. הקבוצה אינה בת מניה במבנה מכיוון שהאובייקט שהוא פונקציה המתאימה לכל איבר בקבוצה מספר טבעי, אינו נמצא במבנה. אבל הפונקצייה הזו כן קיימת מחוץ למבנה, ולכן מחוץ למבנה קבוצה זו אכן בת מניה.

<u>מסקנה נוספת ממשפט השלמות - משפט הקומפקטיות</u>:

תורה T היא ספיקה אמ"ם כל קבוצה חלקית סופית של T היא ספיקה.

<u>מסקנה</u>:

ניקח אם כן $\sigma_{PA} = \langle 0, S, +, \times, =, < \rangle$ ותהי T קבוצת כל הפסוקים של $L(\sigma)$ במספרים הטבעיים. T ספיקה, כי $\mathbb{N}$ מודל שלה, אך יש לה גם מודלים אחרים.

<u>הוכחה</u>: סימון: $\overline{1} = s(0), \overline{2} = s(s(0)), \ldots$. נוסיף ל-$\sigma_{PA}$ קבוע חדש, w (∞), נוסיף ל-T את האקסיומות הבאות:
$0 < w, \overline{1} < w, \ldots$ ונסמן את התורה המתקבלת ב-T_w. המספרים הטבעיים עם הפירושים הרגילים של $0, S, +, \times, =, <$ אינם יכולים להיות מודל של T_w אבל בכל זאת T_w היא ספיקה לפי משפט הקומפקטיות. ואכן, תהי $\Gamma \subseteq T_w$ קבוצה סופית ויהי k המספר המקסימלי כך ש-$\overline{k} < w$ (יש כזה בגלל ש-Γ סופית. ניקח בתור מודל של Γ את המספרים הטבעיים עם הפירושים הרגילים של $0, S, +, \times, =, <$ ו-$k+1$ יהיה הפירוש של w. מכאן שלכל קבוצה חלקית סופית של T_w יש מודל ולכן ל-T_w עצמה יש מודל. מודל זה הוא גם מודל של T המקורית אבל יהיה בו מספר שהוא גדול (במובן של $<$) מכל המספרים הטבעיים.

<u>הגדרה</u>: $\mathbb{N}$ נקרא המודל הסטנדרטי של T וכל מודל אחר נקרא מודל לא סטנדרטי.
הערה: נשים לב שאם $M =< D, I >$ מודל לא סטנדרטי של T_w ונבנה ממנו מספרים רציונליים לא סטנדרטיים בצורה הרגילה, הרי $1/I[w]$ יהיה מספר שונה מאפס, השונה מכל מספר רציונלי חיובי סטנדרטי. כלומר, ל-$1/I[w]$ יש תכונות שנהגו לייחס ל"אינפיניטיסימליים". זהו הבסיס של מה שידוע כיום כ"אנליזה לא סטנדרטית", הנותנת צידוק בדיעבד למה שעשו ניוטון, לייבניץ וחבריהם (המשמשת כיום גם מכשיר להוכחת משפטים באנליזה).

לוגיקה מסדר ראשון עם שוויון

<u>הגדרה</u>: שפה מסדר ראשון עם שוויון היא שפה שיש בה סימן יחס דו-מקומי $=$, ומתייחסים אליו כאל שוויון.

<u>הערה</u>: בדיון על לוגיקה מסדר ראשון עם שוויון, $=$ יהיה סימן השוויון בשפה הפורמלית ו-$\simeq$ יציין שוויון (זהות) במטה שפה.

בלוגיקה מסדר ראשון עם שוויון, $=$ הוא סימן יחס מיוחד שפירושו תמיד יחס הזהות: אם $M = \langle D, I\rangle$ מבנה עבור שפה כזו אז $I\left[=\right] \simeq \left\{\langle a, a\rangle \left| a \in D\right.\right\}$. למבנה כזה לשפות עם שוויון נקרא <u>מבנה נורמלי</u>.

<u>הגדרה</u>:

$T \vdash^t_{FOL^=} \varphi$ אם כל t-מודל נורמלי של T הוא גם t-מודל נורמלי של φ.
$T \vdash^v_{FOL^=} \varphi$ אם כל v-מודל נורמלי של T הוא גם v-מודל נורמלי של φ.

<u>אקסיומות השוויון של שפה L - $Eq\left(L\right)$</u>

1. $\forall x.x = x$
2. $\forall x\forall y.x = y \to y = x$
3. $\forall x\forall y\forall z.x = y \wedge y = z \to x = z$
4. אם f סימן פונקציה n-מקומי של L אז

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n . x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n \to f\left(x_1, \dots, x_n\right) = f\left(y_1, \dots, y_n\right)$$

5. אם p סימן יחס n-מקומי של L אז

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n . x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n \to \left(p\left(x_1, \dots, x_n\right) \to p\left(y_1, \dots, y_n\right)\right)$$

נראה כי $T \vdash^t_{FOL^=} \varphi$ אמ"ם $T \cup Eq\left(L\right) \vdash^t_{FOL} \varphi$ וכי $T \vdash^v_{FOL^=} \varphi$ אמ"ם $T \cup Eq\left(L\right) \vdash^v_{FOL} \varphi$. נתאים לכל מודל $M = \langle D, I\rangle$ של $Eq\left(L\right)$ מבנה נורמלי השקול לו (במובן שיוסבר בהמשך) בצורה הבאה: יהי $\sim = I[=]$, כלומר:

$$a \sim b \Leftrightarrow \langle a, b\rangle \in I\left[=\right]$$

$\sim$ הוא יחס שקילות (בגלל ש-M מודל של $Eq\left(L\right)$). D' יוגדר בתור קבוצת המנה של $\sim$, כלומר קבוצת מחלקות השקילות. נסמן ב-$[\![a]\!]$ את מחלקת השקילות של a.

$$D' \simeq \{[\![a]\!] \mid a \in D\}$$
$$f'^I\left[[\![a_1]\!], \dots, [\![a_n]\!]\right] \simeq [\![f^I[a_1, \dots, a_n]]\!]$$
$$\langle [\![a_1]\!], \dots, [\![a_n]\!]\rangle \in p'^I \Leftrightarrow \langle a_1, \dots, a_n\rangle \in p^I$$

זה מוגדר היטב (לא תלוי במייצגים) בגלל אקסיומות 4 ו-5.

להמשך - ראו תרגול מס' 11.